الواجب

(١) أوجد إحداثي النقطة جـ التي تقع في ربع المسافة من أ إلى ب حيث أ = (٢، ٣)، ب = (٦، -١)

---

(٢) إذا كانت: أ = (٣، -١)، ب = (٥، ٢) وكانت جـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ بحيث ٢ $\overline{أجـ}$ = ٣ جـ ب فأوجد إحداثي جـ إذا كانت

① التقسيم من الداخل

② التقسيم من الخارج

---

(٣) أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه أ = (٥، ٢)، ب = (-٠، ٣)، جـ = (-٢، -١) أوجد إحداثي الرأس د

---

(٤) إذا كانت: أ = (١، ٣)، ب = (-٤، -٢) أوجد إحداثي النقطة جـ إذا كانت: جـ ∈ $\overline{أب}$ بحيث ٣ أجـ = ٢ جـ ب

---

(٥) إذا كانت أ = (٣، ١)، ب = (-١، ٥) أوجد إحداثي نقطة جـ التي تقع عند $\frac{1}{3}$ المسافة من أ إلى ب (الإسماعيلية ٢٠١٣)

---

(٦) إذا كانت أ، ب، جـ ثلاث نقط تقع على استقامة واحدة حيث أ = (٢، ٥)، ب = (٥، ٢)، جـ = (٤، ص) أوجد النسبة التي تقسم بها النقطة جـ القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ موضحاً نوع التقسيم ثم أوجد قيمة ص

---

(٧) أوجد إحداثي النقطة جـ التي تقع عند منتصف المسافة من النقطة أ = (-١، -١) إلى النقطة ب = (٩، ٧)

فكر يا معلم

إذا كانت: أ = (٢، ٢)، ب = (٥، ٦)، جـ = (١٠، -٤) هي رؤوس مثلث، د ∈ بجـ بحيث أد ينصف (أ^) من الداخل أوجد إحداثي النقطة (د)

أ/ مصطفى فوزي سيد
01118275262

معادلة الخط المستقيم



تذكر معنا
كيفية ايجاد الميل

① إذا المستقيم يمر بنقطتين

ل يمر بـ (س١، ص١) ، (س٢، ص٢)

الميل = فرق الصادات / فرق السينات = (ص٢ − ص١) / (س٢ − س١)

② نقطة واحدة في متجه اتجاه

ى (أ، ب) ← الميل = ب / أ

③ على الصورة ← المعادلة

ص = م س + جـ

الميل — الجزء المقطوع

④ ص ، س في طرف واحد

الميل = − معامل س / معامل ص

← ٢س + ٣ص − ٧ = ٠

الميل = −٢ / ٣ = −١

← ٥س + ٣ص − ٥ = ٠ ← الميل = −٥/٣

⑤ ظل الزاوية (ظا هـ) التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

أستنى خلى بالك

لو صنع ٣٠° مع الاتجاه الموجب لمحور الصادات



∴ الميل = ظا (٣٠ + ٩٠) = −√٣

⑥ موازي لمستقيم معلوم

م١ = م٢

⑦ عمودي على مستقيم معلوم

م١ × م٢ = −١

⑧ ميل الموازي لمحور السينات = صفر

= العمودي على محور الصادات

⑨ الميل الموازي لمحور الصادات غير معرف

= العمود على محور السينات

ملحوظة هامة

لتكوين الصور المختلفة محتاجين نقطة ما و متجه اتجاه

01118275262

أ/ مصطفى فواز سيد

مثال ١ اوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٥ ، ٢) وعمودي على المستقيم

٣ س - ٢ ص + ١ = صفر

الحل

ميل المستقيم المعطى = $\frac{٣}{٢}$

ميل المستقيم المطلوب = $\frac{-٢}{٣}$

المتجه (أ ، ب) ← الميل = $\frac{ب}{أ}$

المتجه = (٣ ، -٢) ← الميل = $\frac{-٢}{٣}$

رجعناها لأصلها

① معادلة المتجه $\overline{ر} = \overline{أ} + ك \overline{ى}$

$\overline{ر}$ = (٥ ، ٢) + ك (٣ ، -٢)

② المعادلتان الوسيطتان (البارامتريتان)

∴ س = ٥ + ٣ ك ، ص = ٢ - ٢ ك

③ المعادلة الكارتيزية

$\frac{س - ٥}{٣} = \frac{ص - ٢}{-٢}$

أى ٢ س + ٣ ص - ١٦ = صفر

سبحان الله وبحمده ∴ سبحان الله العظيم

مثال ٢ أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة ص = (٣ ، -٢) والمتجه $\overline{ى}$ = (-٢ ، ١) متجه اتجاه له

الحل

① $\overline{ر}$ = (٣ ، -٢) + ك (-٢ ، ١)

② المعادلتان الوسيطتان

س = ٣ - ٢ ك ، ص = -٢ + ك

③ المعادلة الكارتيزية

$\frac{ص - ص_1}{س - س_1}$ = م ← الميل

$\frac{ص + ٢}{س - ٣} = \frac{١}{-٢}$ ← -٢(ص + ٢) = (س - ٣)

-٢ص - ٤ = س - ٣

س + ٢ ص + ١ = ٠

⇐ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٥) والمتجه (٢ ، ١) متجه اتجاه له

⇐ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بنقطة (٣ ، ١) ومواز يا للمستقيم ٢ س - ٣ ص + ٧ = ٠

مثال ٣ أوجد معادلة المستقيم (بصورة المختلفة) الذي يمر بالنقطة (٣، ٣) ويصنع زاوية موجبة قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل

الميل = ظا ٤٥ = ١ ∴ (١، ١) متجه اتجاه ى

• المتجه ر = (٣، ٣) + ك (١، ١)

• والوسيطتان س = ٣ + ك
ص = ٣ + ك

• الكارتيزية $\frac{س - ٣}{١} = \frac{ص - ٣}{١}$

أي س − ص = ٠

← أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٣، ٢) ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ١٣٥

الحل

خلي بالك

① معادلة محور السينات ص = ٠

② معادلة محور الصادات س = ٠

③ معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢، −٣) موازي
لمحور السينات ص = −٣
لمحور الصادات س = ٢

④ معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل (٠، ٠) متجه اتجاه ى

① المتجه ر = ك ى

② العامة ص = م س

⑤ المستقيم الموازي لمحور الصادات يكون متجه اتجاه له (٠، ١)

⑥ المستقيم الموازي لمحور السينات يكون متجه اتجاه له (١، ٠)

⑦ المستقيم أ س + ب ص + ج = ٠

المتجه العمودي عليه (أ، ب)

متجه اتجاهه (ب، −أ)

فمثلاً ٣ س + ٢ ص − ٥

العمودي عليه (٣، ٢) متجه اتجاهه (٢، −٣)

01118275262

أ/ مصطفى فواز سيد

⑧ $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$

أ ← الجزء المقطوع من محور السينات
ب ← الجزء المقطوع من محور الصادات

⑨ لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات نضع ص = ٠
(هنعوض عن ص = ٠)

١٠ لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات نضع س = ٠
(هنعوض عن س = ٠)

مثال إذا كانت أ = (٠، ٢)، ب = (٢، ١)، حـ = (-٢، ٣) ثلاث نقاط في المستوى فأوجد المعادلة المتجهة للخط المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ ثم أثبت أن أ، ب، حـ تقع على استقامة واحدة

الحل

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{١ - ٢}{٢ - ٠} = \frac{-١}{٢}$

∴ ى = (٢، -١) متجه اتجاه له

∴ ر = (٠، ٢) + ك (٢، -١)

ثانياً ميل $\overleftrightarrow{بحـ}$ = $\frac{٣ - ١}{-٢ - ٢} = \frac{-١}{٢}$

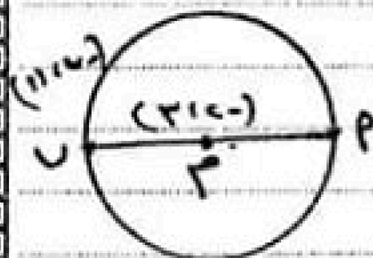
∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{بحـ}$

∴ أ، ب، حـ تقع على استقامة واحدة

مثال $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م وكانت ب (-٧، ١١)، م (-٢، ٣) فأوجد معادلة المماس للدائرة عند نقطة أ

الحل

نفرض أن أ (س، ص)



أرجع بالذاكرة شوية فاكر إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة

∴ $\left(\frac{س - ٧}{٢}، \frac{ص + ١١}{٢}\right) = (-٢، ٣)$

$\frac{س - ٧}{٢} = -٢$ | $\frac{ص + ١١}{٢} = ٣$

س - ٧ = -٤ | ص + ١١ = ٦

س = ٣ | ص = -٥

∴ أ (٣، -٥)

∵ المماس يمر بالنقطة أ، يكون عمودي على $\overline{أب}$ صح!

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{١١ + ٥}{-٧ - ٣} = \frac{-٨}{٥}$

ميل المماس = $\frac{٥}{٨}$ (هنقلب ونغير الإشارة)

∴ معادلة المماس هي $\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = م$

$\frac{ص + ٥}{س - ٣} = \frac{٥}{٨}$ ⟸

تابع حل مثال ٥

٨(ص + ٥) = ٥(س − ٣)

٨ص + ٤٠ = ٥س − ١٥

٥س − ١٥ − ٨ص − ٤٠ = ٠

∴ ٥س − ٨ص − ٥٥ = ٠

مثال ٦ إذا كان

ل١ : ك س − ٤ص = ٥

ل٢ : ٣س + ص + ٧ = ٠

فأوجد ك عندما ① ل١ // ل٢ ② ل١ ⊥ ل٢

الحل

ميل ل١ = م١ = ك/٤

① ∵ ل١ // ل٢ ، ميل ل٢ = م٢ = −٣

∵ م١ = م٢ ∴ ك/٤ = −٣

ك = −١٢

② ل١ ⊥ ل٢ ∴ م١ × م٢ = −١

−٣ك/٤ = −١ ∴ ك = ٤/٣

مثال ٧ إذا قطع المستقيم

٣س + ٤ص − ١٢ = ٠ محوري الإحداثيات في أ ، ب فأوجد

① إحداثيات أ ، ب

② مساحة Δ و أ ب حيث و نقطة الأصل

الحل

بقسمة ÷ ١٢

٣س/١٢ + ٤ص/١٢ = ١٢/١٢

⇐ س/(٤) + ص/(٣) = ١

(٤) ← الجزء المقطوع من السينات ، (٣) ← الجزء المقطوع من الصادات

يقطع محور السينات ٤ وحدات أ(٤ ، ٠)

يقطع محور الصادات ٣ وحدات ب(٠ ، ٣)

② مساحة Δ و أ ب

= ½ القاعدة × الارتفاع

= ½ × ٤ × ٣ = ٦ وحدات مربعة

(شكل: ب ، ٣ وحدات ، و ، ٤ وحدات ، أ)

⇐ أوجد طولي الجزئين المقطوعين من المحورين بواسطة المستقيم

⇐ ٢س − ٣ص + ١٢ = ٠

⇐ أوجد مساحة المثلث المحدد بالمستقيم ٢س + ٣ص = ٦ ومحوري الإحداثيات

قياس الزاوية بين مستقيمين

$$ظا هـ = \left|\frac{م_1 - م_2}{1 + م_1 \times م_2}\right|$$

ملاحظات

١) إذا كان الظل موجب فإننا نحصل على الزاوية الحادة

٢) إذا كان ظا هـ = صفر فإن $م_1 = م_2$ يعني المستقيمان متوازيان أو منطبقان

٣) إذا كان ظا هـ غير معرف أي $\frac{البسط}{المقام = 0}$ فإن قياس الزاوية بينهما = ٩٠° والمستقيمان متعامدان

٤) قياس الزاوية المنفرجة = ١٨٠ - الحادة

خلي بالك وراجع كل قوانين الميل من الدرس اللي فات

لتحديد نوع المثلث من حيث زواياه

$(أ جـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب جـ)^2$ (قائم في ب)

$(أ جـ)^2 > (أ ب)^2 + (ب جـ)^2$ (منفرج في ب)

$(أ جـ)^2 < (أ ب)^2 + (ب جـ)^2$ (حاد في ب)

مثال: أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين ل١، ل٢ حيث ل١: ٢س - ص = ٥، ل٢: ٢ص = س + ٤

الحل

$م_1 = \frac{-2}{-1} = 2$

∵ ل٢: ٢ص = س + ٤ ∴ -س + ٢ص - ٤ = ٠

∴ $م_2 = \frac{1}{2}$

∴ $ظا \theta = \left|\frac{م_1 - م_2}{1 + م_1 م_2}\right| = \left|\frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \times \frac{1}{2}}\right|$

$= \frac{1\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4} \Leftarrow ظا هـ = \frac{3}{4}$

shif tan(3/4)

∴ $\theta = 36° \; 52' \; 12''$

⟸ أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين ل١: س - ٢ص + ٥ = ٠، ل٢: ٢س + ٤ص - ٧ = ٠

⟸ أوجد الزاوية الحادة بين

١) المستقيم س - ٢ص + ٣ = ٠ والمار بـ (٤، -١)، (٢، ١)

٢) المستقيمين س + ٥ص = ٣، ح = (٢، ٣)، و (١، ٤) $م_2 = \frac{1}{4}$

مصطفى فواز سيد
01118275262

مثال إذا كان قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين

س + ك ص − ٨ = ٠ ، ٢س − ص + ٥ = ٠

يساوي $\frac{\pi}{4}$ فأوجد قيمة ك

الحل

م١ = $\frac{-1}{ك}$ ، م٢ = $\frac{-2}{-1}$ = ٢

θ = ٤٥

∵ ظا θ = $\left|\frac{م_1 - م_2}{1 + م_1 \times م_2}\right| = \left|\frac{\frac{-1}{ك} - 2}{1 + 2 \times \frac{-1}{ك}}\right|$

∴ ١ = ± $\frac{\frac{-1}{ك} - 2}{1 - \frac{2}{ك}}$

∴ ١ − $\frac{2}{ك}$ = ± ($\frac{-1}{ك}$ − ٢)

∴ ١ − $\frac{2}{ك}$ = $\frac{-1}{ك}$ − ٢

١ + ٢ = $\frac{2}{ك}$ − $\frac{1}{ك}$

٣ = $\frac{1}{ك}$

∴ ٣ك = ١

∴ ك = $\frac{1}{3}$

أو: ١ − $\frac{2}{ك}$ = $\frac{1}{ك}$ + ٢

١ − ٢ = $\frac{1}{ك}$ + $\frac{2}{ك}$

−١ = $\frac{3}{ك}$

−ك = ٣ ⟸ **ك = −٣**

إذا كان الزاوية بين المستقيمين

ل١: س − ٢ص + ١ = ٠

ل٢: س + ك ص + ٢ = ٠

تساوي ٤٥° فأوجد قيمة ك

مثال ٣ أ ب جـ فيه أ(٠، ٥)، ب(٢، −١)، جـ(٦، ٣)

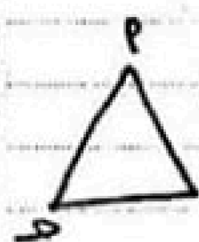
① أثبت أن المثلث متساوي الساقين

② احسب ق(∠أ)

③ احسب مساحة △ أ ب جـ

الحل

①



قانون البعد بين نقطتين

= $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

أب = $\sqrt{(0-2)^2 + (5+1)^2}$ = $2\sqrt{10}$ وحدة طول

ب جـ = $\sqrt{(4)^2 + (4)^2}$ = $4\sqrt{2}$ وحدة طول

أ جـ = $\sqrt{(6)^2 + (2)^2}$ = $2\sqrt{10}$ وحدة طول

∵ أب = أجـ ∴ △ أ ب جـ متساوي الساقين

② ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{5+1}{0-2}$ = −٣

ميل $\overleftrightarrow{أجـ}$ = $\frac{5-3}{0-6}$ = $-\frac{1}{3}$

∴ ظا أ = $\left|\frac{-3 + \frac{1}{3}}{1 + (-3 \times -\frac{1}{3})}\right|$ = $\frac{4}{3}$

ق(∠أ) = ٥٣° ٨′

③ مساحة △ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ × أب × أجـ × جا أ

= $\frac{1}{2}$ × $2\sqrt{10}$ × $2\sqrt{10}$ × جا ٥٣° ٨′

≃ ١٦ وحدة مربعة

طول العمود من نقطة إلى مستقيم

$$ل = \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + ج|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$$

(القانون المستخدم)

خلي بالك

1. إذا كانت ل = صفر فإن النقطة تقع على المستقيم
2. بعد المستقيم عن محور السينات = |الاحداثي الصادي|
3. بعد النقطة عن محور الصادات = |الاحداثي السيني|

مثال ١ أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٣ ، ١) إلى الخط المستقيم ٤ س + ٣ ص − ٥ = ٠

الحل

أ = ٤ ، ب = ٣ ، ج = −٥ ، س١ = ٣ ، ص١ = ١

$$∴ ل = \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + ج|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}} = \frac{|٤ \times ٣ + ٣ \times ١ - ٥|}{\sqrt{١٦ + ٩}} = \frac{|١٠|}{\sqrt{٢٥}}$$

$$= \frac{١٠}{٥} = ٢ \text{ وحدة طول}$$

احسب طول العمود المرسوم من النقطة أ (١ ، ١) إلى الخط المستقيم الذي معادلته ٢ س + ص + ٤ = ٠

الحل

$$ل = \frac{|٢ \times ١ + ١ \times ١ + ٤|}{\sqrt{٢^2 + ١}} = \frac{٧}{\sqrt{٥}} \text{ وحدة طول}$$

مثال أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٣ ، −١) إلى المستقيم $\vec{ر} = (٢ ، ١) + ك(٣ ، ٤)$

الحل

نوجد أولاً معادلة المستقيم في الصورة العامة

$\because \frac{ص - ١}{س - ٢} = \frac{٤}{٣} \quad \therefore ٤س - ٨ = ٣ص - ٣$

$\therefore ٤س - ٣ص - ٥ = ٠$

$\because أ = ٤ \ ، \ ب = -٣ \ ، \ جـ = -٥$

$س_١ = ٣ \qquad ص_١ = -١$

أكمل أنت

مثال ٢ احسب مساحة الدائرة التي مركزها م (٢ ، ١) وتمس المستقيم $٥س + ١٢ص + ٤ = ٠$

الحل

نق = بعد بين المركز والمماس

$\therefore نق = \frac{|٥ \times ٢ + ١٢ \times ١ + ٤|}{\sqrt{٢٥ + (١٢)^٢}} = ٢$ وحدة طول

مساحة الدائرة $= \pi نق^٢$

$= ٤\pi$ وحدة مربعة

أثبت أن المستقيمين $\vec{ر} = (٠ ، ٣) + ك(٤ ، -٣)$ ، $٦س + ٨ص - ١١ = $ صفر متوازيان ثم احسب البعد بينهما

الحل

$\because م_١ = \frac{-٣}{٤} \ ، \ م_٢ = \frac{-٦}{٨} = \frac{-٣}{٤}$

$\therefore م_١ = م_٢$ ∴ المستقيمان متوازيان

$\because (٠ ، ٣) \in ل_١$

∴ البعد بين المستقيمين $= \frac{|٦ \times ٠ + ٨ \times ٣ - ١١|}{\sqrt{٣٦ + ٦٤}}$

$= ١,٣$ وحدة طول

مثال ٣ أثبت أن النقطتين (١ ، ١) ، (−٢ ، ٣) تقعان على جانبين مختلفين من الخط المستقيم $٢س - ص + ٣ = ٠$ وعلى بعدين متساويين منه

الحل

بعد النقطة (١ ، ١) عن المستقيم

$= \frac{|٢ \times ١ - ١ + ٣|}{\sqrt{٤ + ١}} = \frac{|٤|}{\sqrt{٥}} \leftarrow (١)$

بعد النقطة (−٢ ، ٣) عن المستقيم

$= \frac{|٢ \times -٢ - ٣ + ٣|}{\sqrt{٤ + ١}} = \frac{|-٤|}{\sqrt{٥}} \leftarrow (٢)$

من (١) و (٢) الإشارتان مختلفتان ومتساويتان في المقدار ∴ يقعان على جانبين مختلفين

المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين

الفكرة: بنكتب المستقيم الأول + ل × الثاني وتعوض بالنقطة وتطلع قيمة ل وتجمع المتشابه

مثال: اوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين ٢س + ٣ص = ١٨ ، ٥س - ٢ص = ٧ ويمر بالنقطة (٥ ، ٣)

الحل

المعادلة العامة

٢س + ٣ص - ١٨ = ٠

٥س - ٢ص - ٧ = ٠

هي

٢س + ٣ص - ١٨ + ل (٥س - ٢ص - ٧) = ٠

∵ يمر بنقطة (٥ ، ٣)

هنعوض عن س = ٥ ، ص = ٣

٢×٥ + ٣×٣ - ١٨ + ل (٥×٥ - (٢×٣) - ٧) = ٠

١ + ١٢ل = ٠

ل = $\frac{-١}{١٢}$

معادلة المستقيم هي

٢س + ٣ص - ١٨ + $\frac{-١}{١٢}$ (٥س - ٢ص - ٧) = ٠

بضرب × ١٢

٢٤س + ٣٦ص - ٢١٦

-٥س + ٢ص + ٧ = ٠

هنجمع

١٩س + ٣٨ص - ٢٠٩ = ٠

اوجد المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين ٢س + ص = ٥ ، س - ص = ١ ويمر بنقطة (٥ ، ٣)

الحل

أ/ مصطفى فواز سيد
01118275262

مثال اثبت أن المستقيمين

$٢س - ٣ص + ٤ = ٠$

$\vec{ر} = (١، ٢) + ك (-٢، ٣)$

متقاطعان على التعامد ثم اوجد نقطة تقاطعهما

الحل

$م_١ = \frac{-٢}{-٣} = \frac{٢}{٣}$

$م_٢ = \frac{٣}{-٢}$ ∵ $م_١ × م_٢ = \frac{٢}{٣} × \frac{٣}{-٢} = -١$

∴ المستقيمان متعامدان

المعادلة الكارتيزية للمستقيم الثاني

$\frac{ص - ٢}{س - ١} = \frac{-٣}{٢}$

$٢(ص - ٢) = -٣(س - ١)$

$٢ص - ٤ = -٣س + ٣$

$٣س + ٢ص - ٤ - ٣ = ٠$

$٣س + ٢ص - ٧ = ٠$

∴ المعادلتان

$٢س - ٣ص = -٤ \leftarrow (١)$

$٣س + ٢ص = ٧ \leftarrow (٢)$

بضرب الاولى × ٢ والثانية × ٣

$٤س - ٦ص = -٨$

$٩س + ٦ص = ٢١$

$١٣س = ١٣$ ⟸ $س = ١$

بالتعويض عن س = ١ في ①

$٢ - ٣ص = -٤$

$-٣ص = -٤ - ٢$

$-٣ص = -٦$

$ص = ٢$

∴ نقطة التقاطع هي $(١، ٢)$

الواجب حل تمارين الكتاب المدرسي كاملة وتسلم الحصة القادمة

انتهى المنهج بفضل الله

مع الحب وارق تمنياتي الطيبة بالنجاح والتوفيق

م/ مصطفى فواز سيد

تنظيم البيانات في مصفوفات

** تعريف المصفوفة ⇐

هى ترتيب لعدد من العناصر (متغيرات أو أعداد) فى صفوف و أعمدة محصورة بين قوسين

أولاً : ملاحظات :

* تنظم العناصر فى المصفوفة بحيث يكون موقع كل منها فى المصفوفة ذا معنى

* يرمز للمصفوفة عادة بالأحرف الكبيرة مثل : (أ، ب ، ج ، س ، ص ، ٠٠٠٠٠)

و يرمز لعناصرها بالأحرف الصغيرة مثل : (أ ، ب ، حـ ، س ، ص ، ٠٠٠٠)

* عدد الصفوف و عدد الأعمدة يحدد أبعاد المصفوفة أو نظمها

فإذا كان : عدد صفوف المصفوفة = م ، عدد الأعمدة = ن

فإن : المصفوفة على النظم م×ن حيث : م ، ن أعداد صحيحة موجبة

مثال ١

أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٧ \\ ١ & ٠ & ٦ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ٩ \\ ١ & ٢- \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٥ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

المصفوفة أ على النظم ٢×٣ — المصفوفة ب على النظم ٢×٢ — المصفوفة ج على النظم ١×٣

* يعبر عن العنصر داخل المصفوفة أ على الصورة ($أ_{ص ع}$) حيث :

ص ، ع هما الصف و العمود الذى يقع فيه العنصر على الترتيب

* تتميز المصفوفة بالسرعة و الدقة لمعرفة المعلومات و تسهل إتخاذ القرارات

مثال ٢

إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٧ \\ ٦ & ٩ & ١ \\ ٠ & ٥ & ٢- \end{pmatrix}$

أكتب نظم أ ثم أوجد $أ_{٢١}$ ، $أ_{٢٣}$ ، $أ_{٢٢}$ ، $أ_{١٣}$

الحـــــــــــــــــل

نظم أ هو ٣×٣ ، $أ_{٢١}$ = ٣ ، $أ_{٢٣}$ = ٥ ، $أ_{٢٢}$ = ٩ ، $أ_{١٣}$ = ٢-

تمثيل المصفوفات

إذا كانت $ᵃ$ مصفوفة على النظم م × ن فإنه يمكن كتابة المصفوفة ᵃ على الصورة :

ᵃ = (ᵃ$_{ص ع}$) ، ص = ١، ٢، ٣،.....، م ؛ ع = ١، ٢، ٣،.....، ن

و تقتصر دراستنا على الحالات التى فيها م ≥ ٣ ، ن ≥ ٣

==

مثال ٣

أكتب المصفوفة ᵃ (ᵃ$_{ص ع}$) التى على نظم ٢ × ٣ حيث :

ᵃ$_{ص ع}$ = ٢ص − ع + ١

الحـــــــــل

∵ المصفوفة ᵃ على نظم ٢ × ٣ ∴ ᵃ = $\begin{pmatrix} ᵃ_{١١} & ᵃ_{٢١} & ᵃ_{٣١} \\ ᵃ_{١٢} & ᵃ_{٢٢} & ᵃ_{٣٢} \end{pmatrix}$

∵ ᵃ$_{ص ع}$ = ٢ص − ع + ١

∴ ᵃ$_{١١}$ = ٢ × ١ − ١ + ١ = ٢ ، ᵃ$_{٢١}$ = ٢ × ١ − ٢ + ١ = ١

، ᵃ$_{٣١}$ = ٢ × ١ − ٣ + ١ = ٠ ، ᵃ$_{١٢}$ = ٢ × ٢ − ١ + ١ = ٤

، ᵃ$_{٢٢}$ = ٢ × ٢ − ٢ + ١ = ٣ ، ᵃ$_{٣٢}$ = ٢ × ٢ − ٣ + ١ = ٢

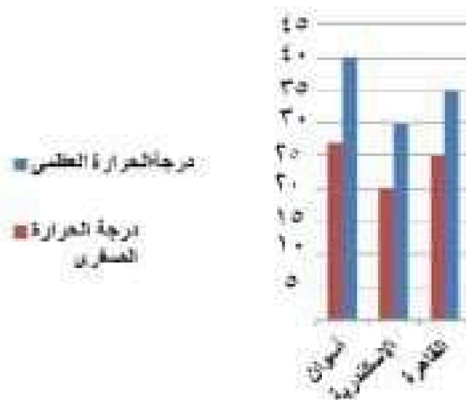
∴ ᵃ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٤ & ٣ & ٢ \end{pmatrix}$

==

تنظيم البيانات الإحصائية بإستخدام المصفوفات

مثال ٤

يبين الرسم البيانى المقابل : درجات الحرارة العظمى و الصغرى لبعض مدن مصر أكتب مصفوفة تمثل بيانات الرسم البيانى المقابل



الحـــــــــل

نفرض أن كل صف يمثل المدينة و كل عمود يمثل مستوى درجات الحرارة العظمى و الصغرى فتكون المصفوفة كما يلى :

	أسوان	الإسكندرية	القاهرة
درجة الحرارة العظمى	٤٠	٣٠	٣٥
درجة الحرارة الصغرى	٢٥	٢٠	٢٥

و هى مصفوفة على النظم ٢ × ٣

بعض المصفوفات الخاصة

١ـ مصفوفة الصف ⇐ هى المصفوفة التى تتكون من صف واحد فقط و أى عدد من الأعمدة

$\text{س} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ على النظم ١ × ٣

، $\text{ص} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$ على النظم ١ × ٢

٢ـ مصفوفة العمود ⇐ هى المصفوفة التى تتكون من عمود واحد فقط و أى عدد من الصفوف

$\text{س} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ علي النظم ٣ × ١، $\text{ص} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ علي النظم ٢ × ١

٣ـ المصفوفة المربعة ⇐ هى المصفوفة التى فيها عدد الصفوف = عدد الأعمدة

$\text{س} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢

، $\text{ص} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة على النظم ٣ × ٣

⇐ **ملاحظة :** القطر الذى تقع عليه العناصر التى فيها رقم الصف = رقم العمود

يسمى القطر الرئيسى

٤ـ المصفوفة الصفرية ⇐ هى المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار و قد تكون مربعة أو لا تكون

، و يرمز لها " بمستطيل صغير " ▭



$\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$ مصفوفة صفرية على النظم ١ × ١

، $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ مصفوفة صفرية على النظم ٢ × ٣

٥ ـ المصفوفة القطرية ⇐ هى مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ماعدا عناصر القطر الرئيسى فيكون أحدها على الأقل مغايراً للصفر (لا يكون صفراً)



$\text{س} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفة قطرية على النظم ٣ × ٣

٦ ـ مصفوفة الوحدة (I) هى مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيسى متساوية و كل منها = ١ ، و باقي العناصر أصفار



المصفوفات $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

هى مصفوفة وحدة

تساوى مصفوفتين

تتساوى مصفوفتان ٱ ، ب إذا كانت على نفس النظم و كان كل عنصر فى المصفوفة ٱ

مساويا لنظيرهُ فى المصفوفة ب أى أن : $ٱ_{ص ع}$ = $ب_{ص ع}$ لكل ص ، ع

مثال ٤

(١) $\begin{pmatrix} \text{٩} & \text{س} \\ \text{-٢} & \text{١} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{٩} & \text{٣} \\ \text{-٢} & \text{ص} \end{pmatrix}$ إذا و فقط إذا كانت : س = ٣ ، ص = ١

(٢) $\begin{pmatrix} \text{٧} & \text{٩} \\ \text{-٢} & \text{٤} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \text{٢} & \text{١} & \text{٠} \\ \text{٤} & \text{٣} & \text{٢} \end{pmatrix}$ لأنهما ليستا على نفس النظم

(٣) $\begin{pmatrix} \text{٧} & \text{٣} & \text{٤} \\ \text{١} & \text{٩} & \text{٦} \\ \text{-٢} & \text{٥} & \text{٠} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{٧} & \text{٣} & \text{٤} \\ \text{١} & \text{٩} & \text{٦} \\ \text{-٢} & \text{٥} & \text{٠} \end{pmatrix}$ لأنهما على نفس النظم
و عناصرهما المتناظرة متساوية

إستخدام المصفوفات المتساوية فى حل المعادلات

مثال ١

إذا كان : $\begin{pmatrix} \text{٢س+ص} & \text{٣ع} \\ \text{س-٥ص} & \text{٤} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{٧} & \text{٩} \\ \text{-٢} & \text{٤} \end{pmatrix}$

أوجد قيم : س ، ص ، ع

الحـــــــــــــــل

∵ المصفوفتان متساويتان ∴ العناصر متناظرة الأوضاع متساوية

∴ ٢س + ص = ٧ (١) ، س - ٥ص = - ٢ (٢)

بضرب (١) × ٥ و بالجمع ينتج : ١١س = ٣٣ ∴ س = ٣

و بالتعويض فى (١) ينتج : ص = ١

، ٣ع = ٩ ، و منها : ع = ٣

ضرب عدد حقيقى فى مصفوفة

ضرب عدد حقيقى فى مصفوفة يعنى ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة فى العدد حقيقى

أى أن : حاصل ضرب عدد حقيقى ك فى مصفوفة س من النظم م × ن

هى مصفوفة ٱ = ك × س على نفس النظم م × ن

و كل عنصر فيها $ٱ_{ص ع}$ يساوى العنصر المناظر له فى المصفوفة س مضروبًا العدد الحقيقى ك

اى أن : $ٱ_{ص ع}$ = ك × $س_{ص ع}$

حيث : ص = ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، م ؛ ع = ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، ن

مثال ٢

إذا كانت : $\underset{\sim}{س} = \begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ك = ٣

الحـــــــــــل

فإن : ك $\underset{\sim}{س}$ = ٣ $\begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢١ \\ ٦ & ١٢ \end{pmatrix}$

ملاحظة : يمكن إخراج عامل مشترك خارج المصفوفة بقسمة جميع عناصر المصفوفة على هذا العدد

مدور المصفوفة

لأى مصفوفة ٱ على النظم م × ن إذا بدلنا الصفوف بالأعمدة أو الأعمدة بالصفوف بنفس الترتيب فإننا نحصل علي مدور المصفوفة [ٱ] و يرمزلها بالرمز $(ٱ^{مد})$ و تكون على النظم ن × م

ملاحظات :

* إذا كانت : ٱ على النظم ٣ × ن فإن : $ٱ^{مد}$ تكون على النظم ن × ٣

* العنصر $ٱ_{١٢} = ٱ^{مد}_{٢١}$ * $(ٱ^{مد})^{مد} = ٱ$

مثال ٣

إذا كانت : $ٱ = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٠ & ٤ \end{pmatrix}$ أوجد $ٱ^{مد}$

الحـــــــــــل

$ٱ^{مد} = \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٠ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$

المصفوفات المتماثلة و شبه المتماثلة

إذا كانت ٱ مصفوفة مربعة فإنها تسمى متماثلة إذا و فقط إذا كانت $ٱ = ٱ^{مد}$

و تسمى شبه متماثلة إذا و فقط إذا كانت $ٱ = - ٱ^{مد}$

مثال ٤

بين أى المصفوفات التالية متماثلة و أيها شبه متماثلة :

$\underset{\sim}{س} = \begin{pmatrix} ٧ & ٣ & ٤ \\ ٣ & ٩ & ٥ \\ ٤ & ٥ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $\underset{\sim}{ص} = \begin{pmatrix} ٠ & ٤ & -١ \\ -٤ & ٠ & ٦ \\ ١ & -٦ & ٠ \end{pmatrix}$

الحـــــــــــل

∵ $\underset{\sim}{س}^{مد} = \begin{pmatrix} ٧ & ٣ & ٤ \\ ٣ & ٩ & ٥ \\ ٤ & ٥ & ٠ \end{pmatrix}$

∴ $\underset{\sim}{س} = \underset{\sim}{س}^{مد}$

∴ $\underset{\sim}{س}$ مصفوفة متماثلة

∵ $\underset{\sim}{ص}^{مد} = \begin{pmatrix} ٠ & -٤ & ١ \\ ٤ & ٠ & -٦ \\ -١ & ٦ & ٠ \end{pmatrix} = -١ \times \begin{pmatrix} ٠ & ٤ & -١ \\ -٤ & ٠ & ٦ \\ ١ & -٦ & ٠ \end{pmatrix}$

$= -\underset{\sim}{ص}$

∴ $\underset{\sim}{ص}$ مصفوفة شبه متماثلة

تمارين (١)

(١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه فيما يلى :

[١] إذا كانت : المصفوفة $\text{أ} = (\text{أ}_{\text{س ع}})$ على النظم ٢ × ٣

و كان : $\text{أ}_{\text{س ع}} = \text{ص}^{٢} - \text{ص ع} + ٥$ فإن : $\text{أ}_{٢١} = \ldots\ldots$

١) ٤ ٢) ٢ ٣) – ٤ ٤) – ٢

[٢] إذا كانت : المصفوفة أ على النظم ٢ × ٣ فإن : عدد عناصرها = ...

١) ٤ ٢) ٢ ٣) ٦ ٤) ٣

[٣] إذا كانت : المصفوفة أ على النظم ٢ × ٣ فإن : $\text{أ}^{\text{مد}}$ على النظم = ...

١) ٢ × ٣ ٢) ٣ × ٢ ٣) ٦ ٤) ٥

[٤] إذا كانت : المصفوفة أ مربعة مكونة من ٣ صفوف فإن : عدد عناصرها = ...

١) ٣ ٢) ٩ ٣) ٦ ٤) ٥

[٥] إذا كانت : المصفوفة أ مصفوفة مربعة مكونة من ٣ صفوف

فإن : $\text{أ}^{\text{مد}}$ على النظم = ...

١) ٢ × ٣ ٢) ٣ × ٢ ٣) ٣ × ٣ ٤) ٩

[٦] إذا كانت : المصفوفة أ مصفوفة عمود مكونة من صفين فإن : عدد عناصرها = ...

١) ١ ٢) ٢ ٣) ٣ ٤) ٤

[٧] إذا كانت : المصفوفة أ مصفوفة عمود مكونة من صفين

فإن : $\text{أ}^{\text{مد}}$ على النظم = ...

١) ٢ × ١ ٢) ١ × ٢ ٣) ٢ × ٢ ٤) ٤

[٨] إذا كانت : $\begin{pmatrix} \text{س}^{٣} + ١ & -٣ \\ ٢\text{ص} + ١ & ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ & -٣ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}$

فإن : س + ص = ...

١) صفر ٢) ١ ٣) ٢ ٤) ٤

[٩] إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٣ & \text{أ} & \text{ب} \\ ١ & \text{حـ} - ١ & \text{ء} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & \text{أ} + \text{ب} \\ -١ & \text{ء} + ٥ \\ ٥ & \text{ء} \end{pmatrix}^{\text{مد}}$

فإن : أ + ب + حـ + ء = ...

١) – ٤ ٢) – ٢ ٣) ٢ ٤) ٤

(٢) أنتجت ثلاث شركات س ، ص ، ع نوعين من الأقمشة فكان ما أنتجته الشركة س عبارة عن ١٠٠٠ متر من النوع الأول ، ١٢٠٠ متر من النوع الثانى ، و ما أنتجته الشركة ص عبارة عن ٥٠٠ متر من النوع الأول ، ٩٠٠ متر من النوع الثانى ، و ما أنتجته الشركة ع عبارة عن ٧٠٠ متر من النوع الأول ، ٤٠٠ متر من النوع الثانى ، أكتب هذه البيانات فى صورة مصفوفة (أ) على النظم ٣ × ٢

، و أكتب أيضاً هذه البيانات فى صورة مصفوفة (ب) على النظم ٢ × ٣

(٣) محلان لبيع الملابس فى أحد الأيام باع المحل الأول ٢٠ قميص ، ٥ بدل ، ١٢ حذاء ، و باع المحل الثانى ١٣ قميص ، ٣ بدل ، ١٤ حذاء ، أكتب هذه البيانات فى صورة مصفوفة س~ على النظم ٢ × ٣

(٤) أكتب المصفوفة أ ($أ_{س ع}$) التى على نظم ٢ × ٢ حيث :

$$أ_{س ع} = ص^{٢} - ع^{٢}$$

(٥) أكتب المصفوفة أ ($أ_{س ع}$) التى على نظم ٢ × ٣ حيث :

$$أ_{س ع} = ص^{٢} - ص ع + ٥$$

(٦) إذا كانت : $\begin{pmatrix} س^{٢} & -١ \\ ٥ & ص + ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & -١ \\ ٥ & ٨ \end{pmatrix}$ فأوجد قيمتى س ، ص

(٧) إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٣ & س & ٥ \\ س + ص & ٤ & ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ & ٥ \\ ٥ & ٤ & ع \end{pmatrix}$

فأوجد قيم س ، ص ، ع

(٨) إذا كانت س~ = $\begin{pmatrix} حـ + ء & ٢ء + ل \\ ٢حـ + ١ & ء - ٢ \end{pmatrix}$ ، ص~ = $\begin{pmatrix} ٣حـ - ء & ٣ل \\ ٦ & ٨ \end{pmatrix}$

هل من الممكن ان يكون : س~ = ص~ و لماذا ؟

(٩) إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٤ & -٣ & ٦ \\ ٠ & ٨ & ٩ \end{pmatrix}$

أذكر نظم أ ، ب ثم أوجد $أ^{مد}$ ، $ب^{مد}$

(١٠) إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & س + ص \\ ٩ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٢س - ص \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix}$

و كان : أ = $ب^{مد}$ فأوجد س ، ص

(١١) أوجد قيم : س ، ص ، ع التى تجعل المصفوفتان متساويتان

$$\begin{pmatrix} س & ٢ & ٤ \\ -١ & ص & ٥ \\ ٤ & ٣ & ١ \end{pmatrix} ، \begin{pmatrix} ٢ & ٢ & ع \\ -١ & ع - ١ & ٥ \\ ٤ & ٣ & ١ \end{pmatrix}$$

جمع و طرح المصفوفات

١_جمع المصفوفات ⟸ إذا كانت : س ، ص مصفوفتين على النظم م×ن فإن : س + ص هى مصفوفة أيضا م×ن و يكون كل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين فى س ، ص

===

مثال١ إذا كانت : س = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ١ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ١- & ٧ \\ ٦ & ١ \end{pmatrix}$ أوجد س + ص

الحـــــــــــــــــل

س + ص = $\begin{pmatrix} ٠+٥ & ٢+٣ \\ ١-١ & ٧+٢ \\ ٦+٤ & ١+١ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٥ \\ ٠ & ٩ \\ ١٠ & ٢ \end{pmatrix}$

===

خواص عملية جمع المصفوفات

بفرض أن : س ، ص ، ع ثلاث مصفوفات من النظم م×ن ، ▭ مصفوفة صفرية على نفس النظم فإن :

[١] خاصية الإنغلاق ⟸ س + ص تكون مصفوفة من نفس النظم م×ن
أى أن : جمع المصفوفات عملية مغلقة

[٢] خاصية الإبدال ⟸ س + ص = ص + س
أى أن : جمع المصفوفات عملية إبدالية

[٣] خاصية الدمج ⟸ (س + ص) + ع = س + (ص + ع) = س + ص + ع
أى أن : جمع المصفوفات عملية دامجة

[٤] خاصية المحايد الجمعى ⟸ س + ▭ = ▭ + س = س
حيث : ▭ مصفوفة صفرية من نفس نظم س

[٥] خاصية المعكوس " النظير " الجمعى ⟸ لأى مصفوفة س يوجد مصفوفة (−س) من نفس النظم بحيث :
س + (−س) = ▭

حيث : ▭ مصفوفة صفرية من نفس نظم س
و تسمى المصفوفة (−س) المعكوس الجمعى للمصفوفة س

طرح مصفوفتين

إذا كانت : المصفوفتين س~ ، ص~ مصفوفتين على نفس النظم م×ن

فإن : س~ − ص~ = س~ + (− ص~) على نفس النظم م×ن

مثال٢

إذا كانت : س~ = $\begin{pmatrix} ٧ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ص~ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$

الحـــــــــــــــل

فإن : س~ − ص~ = $\begin{pmatrix} ٧ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$

ملاحظات ⇐

* عملية طرح المصفوفات ليست إبدالية و ليست دامجة
* إذا كانت : س~ − ص~ = [ ] فإن : س~ = ص~

مثال٣

إذا كانت : س~ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ص~ = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٤ \\ -١ & ١ & ٧ \end{pmatrix}$

أوجد ٣س~ − ٢ص~

الحـــــــــــــــل

٣س~ − ٢ص~ = ٣ $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ − ٢ $\begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٤ \\ -١ & ١ & ٧ \end{pmatrix}$

٣س~ − ٢ص~ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٦ & ٣ \\ ٩ & ٠ & ٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٤ & ٢ & -٨ \\ ٢ & -٢ & -١٤ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} -٤ & ٨ & -٥ \\ ١١ & -٢ & -٨ \end{pmatrix}$

تمارين (٢)

(١) إذا كان : $\text{س} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & -١ \end{bmatrix}$ ، $\text{ص} = \begin{bmatrix} -٥ & ٧ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\text{ع} = \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$

[١] س + ص   [٢] ص − ع

(٢) إختصر : $٣ \begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} + ٢ \begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix} - ٤ \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

(٣) إذا كان : $\begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{جـ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$

أوجد : أ ، ب ، جـ ، د

(٤) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & ٥ \\ -٢ & -٣ \end{bmatrix}$

فأوجد المصفوفة س بحيث : $٣\,\text{أ}^{\text{مد}} - \text{س} = ٢\,\text{ب} - ٣\,\text{س}^{\text{مد}}$

(٥) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & -٣ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٩ & ٠ \\ -٤ & ٧ \end{bmatrix}$

أوجد أ + ب ، ٢ أ − ٣ ب

(٦) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & -٢ & ٣ \\ ٠ & ٤ & ١ \\ ١ & -٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ & -٢ \\ -٣ & ٤ & ٢ \\ ٧ & ٤ & ٠ \end{bmatrix}$

أوجد المصفوفة س التي تحقق العلاقة ٢ أ + س = ٣ ب

(٧) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٨ & ٣ \\ ٢ & ١ \\ -٣ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٥ & -٢ & ٣ \\ ٠ & ٤ & ١ \end{bmatrix}$

فأوجد كلا من : $\text{أ} + \text{ب}^{\text{مد}}$ ، $\text{أ}^{\text{مد}} - \text{ب}$ ، $\text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}}$ إن أمكن

(٨) إذا كانت : $\text{س} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٣ \\ ٢ & -١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $\text{ص} = \begin{bmatrix} -٣ & ٥ & ٣ \\ ٠ & ١ & ٥ \end{bmatrix}$

أوجد المصفوفة أ التي تحقق العلاقة : $٢\,\text{أ} + \text{ص} - \text{س} = \boxed{\quad}$

(٩) إذا كانت : $\text{س} + ٢\,\text{س}^{\text{مد}} + \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ١٠ & ٢ \end{bmatrix}$

فأوجد المصفوفة س

(١٠) إذا كان : $\text{س}^{\text{مد}} - \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{جـ} \end{bmatrix}$ أوجد : س

، إذا كانت : $\text{س} = \boxed{\quad}_{٢ \times ٢}$ أوجد : أ ، ب ، جـ ، د

(١١) إذا كانت : المصفوفة $\begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ -٤ & ٢\text{أ} - ٣ \end{bmatrix}$ هى المعكوس الجمعى للمصفوفة $\begin{bmatrix} \text{جـ} - ١ & \text{أ} - ٥ \\ -٤ & \text{ب} + ٣ \end{bmatrix}$ أوجد : أ ، ب ، جـ

(١٢) أوجد قيم : س ، ص التى تحقق المعادلة : $\text{س} \begin{bmatrix} ٢ \\ ٠ \\ ٠ \end{bmatrix} + \text{ص} \begin{bmatrix} ٠ \\ -٣ \\ ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٦ \\ -٨ \end{bmatrix}$

ضرب المصفوفات

يمكن ضرب مصفوفتين إذا و فقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوى عدد صفوف المصفوفة الثانية

و عند ضرب س مصفوفة من النظم م × ن ، ص مصفوفة من النظم ن × ل

فإن : الناتج هو س ص = ع حيث ع مصفوفة على النظم م × ل

===

مثال ١

إذا كانت : س مصفوفة من النظم ٢ × ٣ ، ص مصفوفة من النظم ٣ × ٢

فإن : س ص مصفوفة على النظم ٢ × ٢

ملاحظات

١ – عملية ضرب المصفوفات تكون ممكنة (معرفة) فى حالة واحدة فقط و هى :

عدد أعمدة المصفوفة الأولى = عدد صفوف المصفوفة الثانية

٢ – إذا كانت : س مصفوفة من النظم م × ن ، ص مصفوفة من النظم ل × ك

حيث : ل ≠ ن فإن : س ص غير معرفة

أى أن : عملية ضرب المصفوفتين فى هذه الحالة غير ممكنة (غير معرفة)

مثال ٢

حدد إذا كانت مصفوفة حاصل الضرب س ص معرفة فى الحالات التالية أم لا :

[١] إذا كانت س مصفوفة من النظم ٤ × ٣ ، ص مصفوفة من النظم ٣ × ١

[٢] إذا كانت س مصفوفة من النظم ٣ × ١ ، ص مصفوفة من النظم ٣ × ٢

الحـــــــــــل

[١] ∵ عدد أعمدة المصفوفة س = عدد صفوف المصفوفة ص

∴ مصفوفة حاصل الضرب س ص معرفة و تكون على النظم ٤ × ١

[٢] ∵ عدد أعمدة المصفوفة س ≠ عدد صفوف المصفوفة ص

∴ مصفوفة حاصل الضرب س ص غير معرفة

===

٣ – و أى عنصر من عناصر ع ينتج من حواصل ضرب عناصر الصف من المصفوفة الأولى " اليمنى " س فى عناصر العمود فى المصفوفة الثانية " اليسرى " ص كلاً فى نظيره

مثال ٣

إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ أوجد : أ ب

الحـــــــــــل

$أ_{2\times3} \times ب_{3\times2} = \begin{pmatrix} ص_1 \times ع_1 & ص_1 \times ع_2 \\ ص_2 \times ع_1 & ص_2 \times ع_2 \end{pmatrix}$ ∴ أ ب من النظم ٢ × ٢

$∴ أ ب = \begin{pmatrix} 2\times2+3\times2+1\times3 & 2\times1+3\times4+1\times1 \\ 1\times2+1\times2+2\times3 & 1\times1+1\times4+2\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 15 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$

٤ ـ الترتيب مهم عند إجراء عملية ضرب مصفوفتين لذا ضرب المصفوفات غير إبدالى

٥ ـ لا يمكن ضرب المصفوفة × نفسها إلا إذا كانت مربعة



حيث : $أ^٢ = أ × أ$ ، $أ^٤ = أ^٢ × أ^٢$

إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ١- \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣- & ٤ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix}$

أوجد : أب ، ب أ ، $أ^٢$ ، $أ^٤$ ، $ب^٢$ إن أمكن

الحـــــــــــــــــل

∵ $أ_{٢×٢}$، $ب_{٣×٢}$ ∴ أب غير معرف (لأن عدد أعمدة أ ≠ عدد صفوف ب)

∵ $ب_{٣×٢}$ ، $أ_{٢×٢}$ ∴ ب أ من النظم ٣ × ٢

$$∴ ب أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣- & ٤ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ١- \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & ١ \\ ١- & ٧ \\ ١٥ & ٥ \end{pmatrix}$$

∵ $أ_{٢×٢}$ ∴ $أ^٢ = أ_{٢×٢} × أ_{٢×٢}$ من النظم

$$∴ أ^٢ = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٤ \\ ٨ & ١ \end{pmatrix}$$

$$∴ أ^٤ = أ^٢ × أ^٢ = \begin{pmatrix} ٧ & ٤ \\ ٨ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٧ & ٤ \\ ٨ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٧ & ٢٤ \\ ٤٨ & ٣١ \end{pmatrix}$$

∵ $ب_{٣×٢}$ ∴ $ب^٢$ غير معرف لأن ب مصفوفة غير مربعة

خواص عملية ضرب المصفوفات

من تعريف عمليتى جمع و ضرب المصفوفات مع إفتراض تحقق الشروط اللازمة للتعريفين يمكن إستنتاج الخواص التالية :

١ ـ خاصية الدمج ⇐ إذا كانت : سـ ، صـ ، ع ثلاث مصفوفات

فإن : (سـ صـ) ع = سـ (صـ ع)

اى أن : ضرب المصفوفات عملية دامجة

٢ ـ خاصية المحايد الضربى ⇐ لأى مصفوفة سـ فإن : سـ × I = I × سـ = سـ

حيث I مصفوفة الوحدة من نفس نظم سـ

٣ ـ خاصية توزيع ضرب المصفوفات على جمعها ⇐ سـ (صـ + ع) = سـ صـ + سـ ع

، (سـ + صـ) ع = سـ ع + صـ ع

ملاحظة ⇐ سـ × صـ ≠ صـ × سـ

٤ ـ الترتيب مهم عند إجراء عملية ضرب مصفوفتين لذا ضرب المصفوفات غير إبدالى

٥ ـ لا يمكن ضرب المصفوفة × نفسها إلا إذا كانت مربعة

حيث : أ^{2} = أ × أ ، أ^{4} = أ^{2} × أ^{2}



إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

أوجد : أ ب ، ب أ ، أ^{2} ، أ^{4} ، ب^{2} إن أمكن

الحـــــــــــــــل

∵ أ$_{2\times2}$ ، ب$_{3\times2}$ ∴ أ ب غير معرف (لأن عدد أعمدة أ ≠ عدد صفوف ب)

∵ ب$_{3\times2}$ ، أ$_{2\times2}$ ∴ ب أ من النظم ٣ × ٢

∴ ب أ = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -1 & 7 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}$

∵ أ$_{2\times2}$ ∴ أ^{2} = أ$_{2\times2}$ × أ$_{2\times2}$ من النظم ٢ × ٢

∴ أ^{2} = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$

∴ أ^{4} = أ^{2} × أ^{2} = $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 24 \\ 48 & 31 \end{pmatrix}$

∵ ب$_{3\times2}$ ∴ ب^{2} غير معرف لأن ب مصفوفة غير مربعة

خواص عملية ضرب المصفوفات

من تعريف عمليتى جمع و ضرب المصفوفات مع إفتراض تحقق الشروط اللازمة للتعريفين يمكن إستنتاج الخواص التالية :

١ ـ خاصية الدمج ⇐ إذا كانت : س ، ص ، ع ثلاث مصفوفات

فإن : (س ص) ع = س (ص ع)

اى أن : ضرب المصفوفات عملية دامجة

٢ ـ خاصية المحايد الضربى ⇐ لأى مصفوفة س فإن : س × I = I × س = س

حيث I مصفوفة الوحدة من نفس نظم س

٣ـ خاصية توزيع ضرب المصفوفات على جمعها ⇐ س (ص + ع) = س ص + س ع

، (س + ص) ع = س ع + ص ع

ملاحظة ⇐ س × ص ≠ ص × س

تمارين (٣)

(١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه فيما يلي :

[١] إذا كانت : المصفوفة أ على النظم م × ن ، المصفوفة ب على النظم ل × ك
فإنه يمكن ضرب أ × ب عندما ٠٠٠٠

١) م = ن ٢) ل = ك ٣) ن = ل ٤) م = ك

[٢] إذا كانت : المصفوفة أ على النظم م × ن ، المصفوفة ب على النظم ل × ك
فإنه يمكن ضرب ب × أ عندما ٠٠٠٠

١) م = ن ٢) ل = ك ٣) ن = ل ٤) م = ك

[٣] إذا كانت : المصفوفة أ على النظم م × ن ، المصفوفة ب على النظم ل × ك
فإنه يمكن ضرب أ × أ عندما ٠٠٠٠

١) م = ن ٢) ل = ك ٣) ن = ل ٤) م = ك

[٤] إذا كانت : المصفوفة أ على النظم م × ن ، المصفوفة ب على النظم ل × ك
فإنه يمكن إيجاد $ب^{٢}$ عندما ٠٠٠٠

١) م = ن ٢) ل = ك ٣) ن = ل ٤) م = ك

[٥] إذا كانت : المصفوفة أ على النظم م × ن ، المصفوفة ب على النظم ل × ك
و كان ج = أ × ب فإن : ج تكون على النظم ٠٠٠٠

١) م × ن ٢) ل × ك ٣) ن × ل ٤) م × ك

[٦] إذا كانت : المصفوفة أ على النظم ٢ × ٣ فإنه يمكن ضرب $أ^{مد}$ × I
إذا كانت I على النظم ٠٠٠٠

١) ٢ × ٣ ٢) ٢ × ٢ ٣) ٣ × ٣ ٤) ١ × ٣

[٧] إذا كانت : المصفوفة أ على النظم ٢ × ٣ فإن حاصل الضرب $أ^{مد}$ × I
يكون على النظم ٠٠٠٠

١) ٢ × ٣ ٢) ٢ × ٢ ٣) ٣ × ٣ ٤) ٣ × ١

[٨] إذا كانت : المصفوفة أ على النظم ٢ × ٣ ، المصفوفة ب على النظم ٠٠٠٠
فإن أ × ب مصفوفة على النظم ٢ × ١

١) ٢ × ٣ ٢) ٣ × ٢ ٣) ٣ × ٣ ٤) ٣ × ١

[٩] إذا كانت : المصفوفة أ على النظم م × ن ، المصفوفة ب على النظم م × ل
فإن $أ^{مد}$ × ب مصفوفة على النظم ٠٠٠٠

١) م × ن ٢) ن × ل ٣) م × ل ٤) م × م

[١٠] إذا كانت : $\begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -١ & ١ \\ س & -١ \end{pmatrix} = I$ فإن : س = ٠٠٠٠

١) ١ ٢) ٢ ٣) ٣ ٤) ٤

[١١] إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٢ & ٥ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$

أ × ب = س I فإن : س = ٠٠٠٠

١) ١٣ ٢) -١٣ ٣) ٥ ٤) -٥

[١٢] إذا كانت : $\begin{pmatrix} س & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}^{٢} = \begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ فإن : س = ٠٠٠٠

١) ٢ ٢) -٢ ٣) ١ ٤) -١

(٢) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٠ & -٢ \\ ٨ & ٥ \end{pmatrix}$

فأوجد قيمة : $أ^{٢}$ - ٣ ب

(٣) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٤ & ٣ \end{pmatrix}$ إثبت أن : $أ^{٢} - ٥ أ + ٢ I =$ ▭

(٤) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س بحيث : $٢ س + س^{t} = أ ب$

(٥) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٤ & -٤ \end{pmatrix}$ إثبت أن : $أ^{٢} - ٤ أ + ٤ I = (أ - ٢ I)^{٢}$

(٦) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة : س التى تحقق المعادلة : $أ^{٢} - س^{t} = أ ب + ٢ س$

(٧) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة : س التى تحقق المعادلة : $أ ب - I = ٢ س^{t}$

حيث : I مصفوفة وحدة على النظم ٢ × ٢

(٨) إذا كان : $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{pmatrix} ٤ & س \\ ٥ & ص \\ ع & ٢ع \end{pmatrix}^{t} = \begin{bmatrix} ٣ & ١٧ & -٢٠ \end{bmatrix}$

أوجد قيم : س ، ص ، ع

(٩) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ & -١ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ١ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة : س التى تحقق المعادلة : $س^{t} = أ^{٢} + (ب ج)^{t}$

(١٠) أوجد قيم : س ، ص ، ع التى تحقق أن :

$$\begin{pmatrix} ١ & س & ٢ \\ س + ص & -٢ & ١ \\ ٣ & ٤ & ص - ع \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ ٠ & -١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٤ \end{pmatrix} = ٢ \begin{pmatrix} ١ & ١ & ٤ \\ ٠ & ١ & ٢ \\ ٣ & -٢ & ٢ \end{pmatrix}$$

(١١) إذا كان : $أ = \begin{pmatrix} ١ & س & ص \\ ٠ & ٢ & ع \\ ٠ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $أ^{٢} = \begin{pmatrix} ١ & ٦ & ١٠ \\ ٠ & ٤ & -٥ \\ ٠ & ٠ & ٩ \end{pmatrix}$

أوجد قيم : س ، ص ، ع

(١٢) فى إحدى المسابقات فاز فريق أنبى فى ١٢ مباراة و تعادل فى ٣ مباريات ، و فاز فريق الترسانة فى ٩ مباراة و تعادل فى ٤ مباريات و خسر مباراتين بينما فاز فريق الأهلى فى ٦ مباريات و تعادل فى ٥ مباريات و خسر ٤ مباريات فإذا كان الفريق الفائز يحصل ٣ نقاط و المتعادل يحصل على نقطة واحدة و الخاسر لا يحصل على أى نقطة أكتب هذه البيانات فى صورة مصفوفتين س على النظم ٣ × ٣ ، ص على النظم ٣ × ١ ثم أوجد س × ص ثم عبر عن كل عنصر من عناصر المصفوفة س × ص

(١٣) محلان لبيع الملابس الرجالى كانت مبيعات المحل الأول فى أحد الأسابيع ١٢ قميص ، ٨ بنطلون ، ٢ بدلة بينما كانت مبيعات المحل الثانى فى نفس الأسبوع ١٥ قميص ، ٦ بنطلون ، بدلة واحدة فإذا كان ثمن البيع فى المحلين ٥٠ جنيهاً للقميص ، ٨٠ جنيهاً للبنطلون ، ٥٠٠ جنيهاً للبدلة أكتب المبيعات على صورة مصفوفة على النظم ٢ × ٣ و أسعار المبيعات على صورة مصفوفة على النظم ٣ × ١ ثم أوجد المصفوفة التى تبين جملة مبيعات كل محل

(١٤) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ أوجد : $أ^{٢}$ ، $أ^{٣}$ ، $أ^{٤}$ ثم أستنتج $أ^{٧}$

المحددات

تعريف ⟸ إذا كانت : أ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢ حيث :

$\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{ء} \end{pmatrix}$ فإن : محدد المصفوفة أ و يرمز | أ | و يسمى بمحدد **الرتبة الثانية** و هو العدد المعرف كالتالى :

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{ء} \end{vmatrix} = \text{أء} - \text{حـ ب}$$

ملاحظة ⟸

قيمة محدد الرتبة الثانية يساوى حاصل ضرب عنصرى القطر الرئيسى (أ ء) مطروحاً منه حاصل ضرب عنصرى القطر الآخر (ب حـ)

مثال ١ أوجد قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٨ \end{vmatrix}$

الحـــــــــــل

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٨ \end{vmatrix} = ٢ \times ٨ - ٥ \times ٣ = ١٦ - ١٥ = ١$$

محدد الرتبة الثالثة ⟸ يسمى محدد المصفوفة على النظم ٣ × ٣ محدد الرتبة الثالثة

و لإيجاد قيمة محدد الرتبة الثالثة $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{ز} & \text{ح} & \text{ط} \end{vmatrix}$ فإن :

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{ز} & \text{ح} & \text{ط} \end{vmatrix} = \text{أ} \begin{vmatrix} \text{هـ} & \text{و} \\ \text{ح} & \text{ط} \end{vmatrix} - \text{ب} \begin{vmatrix} \text{ء} & \text{و} \\ \text{ز} & \text{ط} \end{vmatrix} + \text{حـ} \begin{vmatrix} \text{ء} & \text{هـ} \\ \text{ز} & \text{ح} \end{vmatrix}$$

$$= \text{أ} (\text{هـط} - \text{ح و}) - \text{ب} (\text{ءط} - \text{ز و}) + \text{حـ} (\text{ءح} - \text{ز هـ})$$

مثال ٢ أوجد قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ١ & ٢ & ٥ \\ ٣ & -١ & -١ \end{vmatrix}$

الحـــــــــــل

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ١ & ٢ & ٥ \\ ٣ & -١ & -١ \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ -١ & -١ \end{vmatrix} - ٣ \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix} + ١ \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix}$$

$$= ٢ \times (-٢ + ٥) - ٣ \times (-١ - ١٥) + ١ \times (-١ - ٦)$$

$$= ٦ + ٤٨ - ٧ = ٤٧$$

المحدد الأصغر المناظر لأى عنصر فى مصفوفة

إذا كانت : أ مصفوفة مربعة على النظم ٣ × ٣ حيث : $أ = \begin{pmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{pmatrix}$

فإن : المحدد الأصغر للعنصر $أ_{١١}$ و يرمز له بالرمز $|أ_{١١}|$ هو $\begin{vmatrix} أ_{٣٢} & أ_{٢٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} \end{vmatrix}$

و نحصل عليه بحذف الصف و العمود المتقاطعين عند العنصر $أ_{١١}$ كما يلى : $\begin{pmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{pmatrix}$

بالمثل : المحدد الأصغر للعنصر $أ_{٢١}$ و يرمز له بالرمز $|أ_{٢١}|$ هو $\begin{vmatrix} أ_{٣٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{١٣} \end{vmatrix}$

و هكذا ، و جميع هذه المحددات هى محددات من الرتبة الثانية

ملاحظة ⇐

* إذا كانت : أ مصفوفة مربعة على النظم ٣ × ٣ حيث : $أ = \begin{pmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{pmatrix}$

، محدد أ يرمز له بالرمز $|أ|$

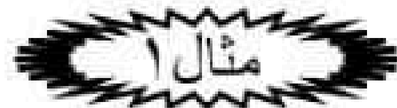
فإن : $|أ| = أ_{١١} \begin{vmatrix} أ_{٣٢} & أ_{٢٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} \end{vmatrix} - أ_{٢١} \begin{vmatrix} أ_{٣٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{١٣} \end{vmatrix} + أ_{٣١} \begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{vmatrix}$

$= أ_{١١} |أ_{١١}| - أ_{٢١} |أ_{٢١}| + أ_{٣١} |أ_{٣١}|$

* فى الملاحظة السابقة ضرب كل عنصر فى المحدد الأصغر المناظر له مسبوقا بالإشارات (+ ، − ، +) على الترتيب

و إشارة المحدد الأصغر المناظر للعنصر $أ_{صع}$ تتعين بالقاعدة :

إشارة $|أ_{صع}|$ هى نفس إشارة $(-١)^{ص+ع}$



إشارة $|أ_{٢١}|$ هى نفس إشارة $(-١)^{١+٢}$ و هى سالبة

، إشارة $|أ_{٣١}|$ هى نفس إشارة $(-١)^{١+٣}$ و هى موجبة

اى لتحديد إشارة أى محدد مناظر لعنصر ما نجمع رتبى الصف و العمود اللذين يتقاطعان عند هذا العنصر :

* فإذا كان مجموع الرتبتين زوجيا كانت الإشارة موجبة
* فإذا كان مجموع الرتبتين فرديا كانت الإشارة سالبة

ملاحظة ⇐ ، و تكون قاعدة الإشارات للمحدد الأصغر كما يلى : $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

* يمكن إيجاد قيمة المحدد (فك المحدد) باستخدام عناصر أى صف (أو عمود) و محدداتها الصغرى و إشاراتها المناسبة

و للتسهيل تستخدم عناصر الصف أو العمود الذى يحتوى على أكبر عدد من الأصفار بعد أخذ الإشارة المناسبة

محدد المصفوفة المثلثية

المصفوفة المثلثية هى مصفوفة جميع عناصرها التى تقع تحت (أو فوق)القطر الرئيسى أصفار مثل :

$$\begin{pmatrix} ٩ & ٣ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} ، \begin{pmatrix} ٧ & ٣ & ٤ \\ ٠ & ٩ & ٦ \\ ٠ & ٠ & ٥ \end{pmatrix} ، \begin{pmatrix} ٧ & ٠ & ٠ \\ ٤ & ٩ & ٠ \\ -٥ & ١ & ٥ \end{pmatrix}$$

و يلاحظ أن : قيمة محدد المصفوفة المثلثية يساوى حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى

اى ان :
$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & ٠ & ٠ \\ \text{أ}_{21} & \text{أ}_{22} & ٠ \\ \text{أ}_{31} & \text{أ}_{32} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} = \text{أ}_{11}\,\text{أ}_{22}\,\text{أ}_{33}$$

و لبرهان ذلك نفك المحدد بإستخدام عناصر الصف الأول

$$\text{المحدد} = \text{أ}_{11} \begin{vmatrix} \text{أ}_{22} & ٠ \\ \text{أ}_{32} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} = \text{أ}_{11}\,(\text{أ}_{22} \times \text{أ}_{33} - \text{أ}_{32} \times ٠) = \text{أ}_{11}\,\text{أ}_{22}\,\text{أ}_{33}$$

مثال٢

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٢ & ٠ \\ ٣ & -١ & ٩ \end{vmatrix} = ٢ \times ٢ \times ٩ = ٣٦$$

لإيجاد مساحة سطح المثلث بإستخدام المحددات

يمكن إستخدام المحددات لإيجاد مساحة سطح المثلث بمعلومية إحداثيات رؤوسه كالتالى :
مساحة سطح المثلث الذى رؤوسه : س (أ ، ب) ، ص(حـ ، ء) ، ع (هـ ، و)

هى | م | حيث :

$$| م | = \frac{١}{٢} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & ١ \\ \text{حـ} & \text{ء} & ١ \\ \text{هـ} & \text{و} & ١ \end{vmatrix}$$

، | م | تعنى قيمة م الموجبة

مثال٣

أوجد مستخدمًا المحددات مساحة سطح المثلث الذى إحداثيات رؤوسه
(−١، −٣) ، (٢، ٤)، (−٣، ٥)

الحــــــــــــل

$$م = \frac{١}{٢} \begin{vmatrix} -١ & -٣ & ١ \\ ٢ & ٤ & ١ \\ -٣ & ٥ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= \frac{١}{٢} \left[-١ \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} - (-٣) \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ -٣ & ١ \end{vmatrix} + ١ \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ -٣ & ٥ \end{vmatrix} \right]$$

$$= \frac{١}{٢} [\, ١ (٤ \quad ٥) + ٣ (٢ + ٣) + ١ (١٠ + ١٢)]$$

$$= \frac{١}{٢} (١ + ١٥ + ٢٢) = ١٩$$ وحدة مربعة

إستخدام المحددات لإثبات أن ثلاث نقط تقع على إستقامة واحدة

يمكن إستخدام المحددات لإثبات أن النقط س (ا ، ب) ، ص(حـ ، ء) ، ع (هـ ، و) كالتالي :

نوجد Δ حيث : Δ تعنى قيمة المحدد $\Delta = \begin{vmatrix} ا & ب & ١ \\ حـ & ء & ١ \\ هـ & و & ١ \end{vmatrix}$

فإذا كانت : Δ = صفر فإن : النقط تقع على إستقامة واحدة

==

حل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر

إذا كان لدينا نظام من المعادلات الخطية فى مجهولين كما يلى :

ا س + ب ص = م ، حـ س + ء ص = ن فإن : المصفوفة التى عناصرها

معاملا المجهولين بعد ترتيب النظام تسمى بمصفوفة المعاملات $\begin{pmatrix} ا & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix}$

و يمكن إستخدام المحددات لحل أنظمة المعادلات الخطية ، فإذا كانت قيمة محدد مصفوفة المعاملات

$\Delta \Leftarrow$ $\begin{vmatrix} ا & ب \\ حـ & ء \end{vmatrix}$ و يرمز له بالرمز Δ " و يقرأ دلتا " لا تساوى صفراً فإن للنظام حلاً وحيداً

ملاحظة $\Leftarrow$ ، أما إذا كانت قيمة المحدد تساوى صفراً فإما أن يكون للنظام عدد لا نهائى من من الحلول أو ليس له حل

نلاحظ فى المحدد Δ أن معاملى المجهول س تكون العمود الأول ، و معاملى المجهول ص تكون العمود الثانى

Δ س $\Leftarrow$ و يسمى $\begin{vmatrix} م & ب \\ ن & ء \end{vmatrix}$ محدد المجهول س و يرمز له بالرمز Δ س " و يقرأ دلتا س "

، و نحصل عليه من المحدد Δ بعد تغيير عناصر العمود الأول (معاملات س) بالثوابت م ، ن

Δ ص $\Leftarrow$ و يسمى $\begin{vmatrix} ا & م \\ حـ & ن \end{vmatrix}$ محدد المجهول ص و يرمز له بالرمز Δ ص " و يقرأ دلتا ص "

، و نحصل عليه من المحدد Δ بعد تغيير عناصر العمود الأول (معاملات ص) بالثوابت م ، ن

$\Leftarrow$ فإذا فرضنا أن : $\Delta \neq$ ٠ فإن حل النظام هو :

س = $\frac{\Delta_{س}}{\Delta}$ ، ص = $\frac{\Delta_{ص}}{\Delta}$

و يمكن التحقق من الحل بالتعويض عن قيم س ، ص فى كلا المعادلتين

مثال٤

حل نظام المعادلتين الآتيتين بطريقة كرامر

س + ص = ٥ ، ٢س − ص = ١

الحـــــــــــــل

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (1 \times -1) - (2 \times 1) = -1 - 2 = -3 \neq 0$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (5 \times -1) - (1 \times 1) = -5 - 1 = -6$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1 \times 1) - (2 \times 5) = 1 - 10 = -9$$

$$\therefore \text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{-6}{-3} = 2 \quad ، \quad \text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{-9}{-3} = 3$$

∴ مجموعة الحل = { (٢ ، ٣) }

حل أنظمة من المعادلات الخطية فى ثلاثة مجاهيل

إذا كان لدينا نظام من المعادلات الخطية فى ثلاثة مجاهيل كالآتى :

$$\text{أ}_1\text{س} + \text{ب}_1\text{ص} + \text{جـ}_1\text{ع} = \text{م} \quad ، \quad \text{أ}_2\text{س} + \text{ب}_2\text{ص} + \text{جـ}_2\text{ع} = \text{ن} \quad ، \quad \text{أ}_3\text{س} + \text{ب}_3\text{ص} + \text{جـ}_3\text{ع} = \text{ك}$$

فإنه بطريقة مماثلة لما فعلناه فى حالة نظام معادلتين فى مجهولين يكون :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{جـ}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 & \text{جـ}_2 \\ \text{أ}_3 & \text{ب}_3 & \text{جـ}_3 \end{vmatrix}$$ = محدد المعاملات

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} \text{م} & \text{ب}_1 & \text{جـ}_1 \\ \text{ن} & \text{ب}_2 & \text{جـ}_2 \\ \text{ك} & \text{ب}_3 & \text{جـ}_3 \end{vmatrix}$$ = محدد المجهول س و نحصل عليه بتغيير عناصر العمود الأول (معاملات س) بالثوابت م ، ن ، ك

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{م} & \text{جـ}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ن} & \text{جـ}_2 \\ \text{أ}_3 & \text{ك} & \text{جـ}_3 \end{vmatrix}$$ = محدد المجهول ص و نحصل عليه بتغيير عناصر العمود الأول (معاملات ص) بالثوابت م ، ن ، ك

$$\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{م} \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 & \text{ن} \\ \text{أ}_3 & \text{ب}_3 & \text{ك} \end{vmatrix}$$ = محدد المجهول ع و نحصل عليه بتغيير عناصر العمود الأول (معاملات ع) بالثوابت م ، ن ، ك

فإذا فرضنا أن : $\Delta \neq 0$ فإن حل النظام هو :

$$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} \quad ، \quad \text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} \quad ، \quad \text{ع} = \frac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta}$$

و يمكن التحقق من الحل بالتعويض عن قيم س ، ص ، ع فى كلا المعادلتين

تمارين (٤)

(١) إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه فيما يلى :

[١] $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = \cdots\cdots$

١) −١ ٢) ١ ٣) ١٣ ٤) ٤١

[٢] $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} = \cdots\cdots$

١) ١١١ ٢) ٩٠ ٣) ٣٠ ٤) صفر

[٣] $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \cdots\cdots$

١) −٩ ٢) صفر ٣) ٦ ٤) ٩

[٤] $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & -6 & 5 \end{vmatrix} = \cdots\cdots$

١) −٤ ٢) صفر ٣) ٤ ٤) ١٠

(٢) أوجد قيمة المحددات التالية :

[١] $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}$ [٢] $\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}$ [٣] $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

[٤] $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ [٥] $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ [٦] $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

(٣) باستخدام طريقة كرامر حل المعادلات :

[١] س + ٣ ص = ٥ ، ٤ س + ٣ ص = ٢

[٢] ٢ س − ص − ٣ = ٠ ، س − ص − ١ = ٠

[٣] ٢ س + ٣ ص + ع = ٧ ، س + ٢ ص + ٥ ع = ٠ ،
٣ س − ص − ع = ٢

[٤] ٢ س + ٣ ص − ع = ٠ ، س + ٢ ع − ٣ ص = ٢ ،
ص + ع + ٢ = ٠

(٤) أوجد مستخدماً المحددات مساحة سطح المثلث الذى رؤوسه :

[١] (٣ ، ٢) ، (−٤ ، ١) ، (٢ ، −١)

[٢] (−٢ ، ٤) ، (٣ ، −١) ، (٤ ، ٥)

[٣] (٥ ، −٥) ، (−١ ، ٧) ، (١٥ ، ١٥)

(٥) باستخدام المحددات أثبت أن النقط التالية تقع على إستقامة واحدة :

[١] (−٢ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٤ ، ٤)

[٢] (٠ ، ٢) ، (٤ ، ٨) ، (٦ ، ١١)

[٣] (−٢ ، ٧) ، (−٣ ، ٤) ، (١ ، ١٦)

المعكوس الضربى للمصفوفة

المعكوس الضربى للمصفوفة على النظم ٢× ٢ ⇐

* إذا كانت : أ ، ب مصفوفتان مربعتان كل منهما على النظم ٢× ٢
و كان : أ ب = ب أ = I فإن : المصفوفة ب تسمى معكوسا ضربياً للمصفوفة أ
و كذلك تسمى المصفوفة أ معكوساً ضربياً للمصفوفة ب

* إذا كان : للمصفوفة أ معكوساً ضربياً فإننا نرمز لها بالرمز $أ^{-1}$
حيث : أ $أ^{-1}$ = $أ^{-1}$ أ = I

* يكون للمصفوفة أ معكوس ضربى إذا كان محدد أ = $\Delta \neq 0$

* المصفوفة أ لا يكون لها معكوسا ضربيًا إذا كان محدد أ = $\Delta = 0$

خطوات إيجاد المعكوس الضربى للمصفوفة على النظم ٢× ٢ إن وجد ⇐

* إذا كانت : أ مصفوفة مربعة على النظم ٢× ٢ حيث : أ = $\begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix}$

١) نوجد محدد أ = Δ حيث : $\Delta \neq 0$

٢) نبدل بين وضعى العنصرين الواقعين على القطر الرئيسى للمصفوفة

٣) نغير كُلا من إشارتى العنصرين الواقعين على القطر الآخر للمصفوفة

٤) نضرب المصفوفة الناتجة من (٢)، (٣) فى العدد $\frac{1}{\Delta}$

* فنحصل على $أ^{-1}$ حيث : $أ^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} ء & -ب \\ -حـ & أ \end{pmatrix}$

===

مثال ١

أوجد قيم أ التى تجعل لكل من المصفوفات التالية معكوساً ضربياً :

[١] $\begin{pmatrix} أ & ٤ \\ ٩ & أ \end{pmatrix}$

الحـــــــــــــــــل

[١] المصفوفة ليس لها معكوساً ضربياً عندما يكون محدد المصفوفة = ٠

أى عندما $\begin{vmatrix} أ & ٤ \\ ٩ & أ \end{vmatrix} = ٠$ أى عندما : $أ^{2}$ − ٣٦ = ٠ أى عندما : أ = ± ٦

∴ عندما أ ∈ ح − { −٦ ، ٦ } يكون للمصفوفة المعطاه معكوساً ضربياً

حل معادلتين بإستخدام معكوس المصفوفة

إذا كان لدينا نظام من معادلتين خطيتين كالتالى ⇐

$أ_١ س + ب_١ ص = ك_١$ ، $أ_٢ س + ب_٢ ص = ك_٢$

فإنه يمكن كتابتهما على الصورة التالية : $\begin{pmatrix} أ_١ & ب_١ \\ أ_٢ & ب_٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ك_١ \\ ك_٢ \end{pmatrix}$

فإذا فرضنا أن : $أ = \begin{pmatrix} أ_١ & ب_١ \\ أ_٢ & ب_٢ \end{pmatrix}$ ، $\underset{\sim}{س} = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ك_١ \\ ك_٢ \end{pmatrix}$

فإن : المعادلتين يمكن كتابتهما على صورة معادلة مصفوفية واحد كما يلى : $أ \underset{\sim}{س} = ج$

حيث : أ هى مصفوفة المعاملات ، $\underset{\sim}{س}$ هى مصفوفة المجاهيل ، ج هى مصفوفة الثوابت

و إذا كان : محدد $أ \neq ٠$ أى : $أ_١ ب_٢ - أ_٢ ب_١ \neq ٠$

فيكون من الممكن إيجاد حل للمعادلة $أ \underset{\sim}{س} = ج$ كما يلى ⇐

* $أ^{-١} (أ \underset{\sim}{س}) = أ^{-١} ج$ " بضرب طرفى المعادلة من اليمين فى $أ^{-١}$ "
* $\therefore (أ^{-١} أ) \underset{\sim}{س} = أ^{-١} ج$ " خاصية التجميع "
* $\therefore I \underset{\sim}{س} = أ^{-١} ج$ " المعكوس الضربى للمصفوفة أ "
* $\therefore \underset{\sim}{س} = أ^{-١} ج$

و بهذا يتضح أنه يمكننا إيجاد المجهولين س ، ص بدلالة الثوابت
$أ_١$ ، $ب_١$ ، $ك_١$ ، $أ_٢$ ، $ب_٢$ ، $ك_٢$

==

مثال ٢

حل نظام المعادلتين التاليتين بإستخدام المصفوفات

س + ص = ٥ ، ٢س − ص = ١

الحـــــــــــــــــل

نكتب المعادلة المصفوفية $أ \underset{\sim}{س} = ج$ حيث :

$أ = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$ ، $\underset{\sim}{س} = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ٥ \\ ١ \end{pmatrix}$ ∵ محدد $أ = \Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix} = -٣ \neq ٠$

∴ يكون للمصفوفة أ معكوساً ضربياً ، و يكون الحل هو : $\underset{\sim}{س} = أ^{-١} ج$

$\because أ^{-١} = \frac{١}{-٣} \begin{pmatrix} -١ & -١ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \\ \frac{٢}{٣} & -\frac{١}{٣} \end{pmatrix}$

$\therefore \underset{\sim}{س} = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \\ \frac{٢}{٣} & -\frac{١}{٣} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ \\ ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$

∴ س = ٢ ، ص = ٣ ∴ مجموعة الحل = { (٢ ، ٣) }

التشفير بإستخدام المصفوفات

نشاط التشفير بإستخدام المصفوفات :

يمكن إستخدام أى مصفوفة و معكوسها الضربى لتشفير رسالة و يتضح ذلك من المثال التالى :

أ	١	د	٨	ض	١٥	ك	٢٢
ب	٢	ذ	٩	ط	١٦	ل	٢٣
ت	٣	ر	١٠	ظ	١٧	م	٢٤
ث	٤	ز	١١	ع	١٨	ن	٢٥
ج	٥	س	١٢	غ	١٩	هـ	٢٦
ح	٦	ش	١٣	ف	٢٠	و	٢٧
خ	٧	ص	١٤	ق	٢١	ى	٢٨

مثال ٣ بإستخدام الجدول المقابل :

و المصفوفة $س = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$

شفر الرسالة " ذاكر تنجح "
ثم فك هذه الشفرة

الحـــــــــــل

لتشفير الرسالة : نكتب الرسالة " ذاكر تنجح " كمصفوفات على النظم ٢ × ١ بإستخدام الرقم المناظر لكل حرف بالجدول كما يلى :

ذا $\begin{pmatrix} ٩ \\ ١ \end{pmatrix}$ كر $\begin{pmatrix} ٢٢ \\ ١٠ \end{pmatrix}$ تن $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٢٥ \end{pmatrix}$ جح $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٦ \end{pmatrix}$ (١)

نضرب مصفوفة التشفير س فى مصفوفات الرسالة (١) فينتج :

$$\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٩ \\ ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٩ \\ ١٩ \end{pmatrix} \quad ، \quad \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢٢ \\ ١٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١١٨ \\ ٥٤ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ \\ ٢٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨٧ \\ ٣١ \end{pmatrix} \quad ، \quad \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٥ \\ ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٨ \\ ١٦ \end{pmatrix}$$

فتصبح الرسالة على الصورة :

$$\begin{pmatrix} ٣٩ \\ ١٩ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١١٨ \\ ٥٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٨٧ \\ ٣١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣٨ \\ ١٦ \end{pmatrix} \qquad (٢)$$

لفك الشفرة : نوجد المعكوس الضربى لمصفوفة التشفير : $\because$ $س = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ $\therefore \Delta = -٢ \neq ٠$

$$س^{-١} = -\frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ -٢ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{١}{٢} & \frac{٣}{٢} \\ ١ & -٢ \end{pmatrix}$$

نضرب $س^{-١}$ فى مصفوفات الرسالة (٢) فينتج :

$$\begin{pmatrix} -\frac{١}{٢} & \frac{٣}{٢} \\ ١ & -٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣٩ \\ ١٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ \\ ١ \end{pmatrix} \quad ، \quad \begin{pmatrix} -\frac{١}{٢} & \frac{٣}{٢} \\ ١ & -٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١١٨ \\ ٥٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٢ \\ ١٠ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{١}{٢} & \frac{٣}{٢} \\ ١ & -٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٨٧ \\ ٣١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٢٥ \end{pmatrix} \quad ، \quad \begin{pmatrix} -\frac{١}{٢} & \frac{٣}{٢} \\ ١ & -٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣٨ \\ ١٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٦ \end{pmatrix}$$

فتصبح الرسالة على الصورة : $\begin{pmatrix} ٩ \\ ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢٢ \\ ١٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ \\ ٢٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ \\ ٦ \end{pmatrix}$ و من الجدول تصبح : " ذاكر تنجح "

تمارين (٥)

(١) إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه فيما يلى :

[١] يكون للمصفوفة معكوساً ضربياً إذا كان محددها = ٠٠٠٠

١) ٠ ٢) ١ ٣) −١ ٤) ٢

[٢] لا يكون للمصفوفة معكوساً ضربياً إذا كان محددها ≠ ٠٠٠٠

١) ١ ٢) ١ ٣) −١ ٤) ٢

[٣] المصفوفة ٠٠٠٠ لها معكوس ضربى

١) $\begin{pmatrix} ٣ & ٦ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ ٢) $\begin{pmatrix} ١ & ٦ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ ٣) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ ٤) $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$

[٤] المصفوفة ٠٠٠٠ ليس لها معكوس ضربى

١) $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٧ & ٢ \end{pmatrix}$ ٢) $\begin{pmatrix} ٤ & ٦ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ ٣) $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{pmatrix}$ ٤) $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ & ٣ \end{pmatrix}$

(٢) بين ما إذا كان لكل مصفوفة فى ما يلى معكوس ضربى أم لا و فى حالة ما إذا كان لها معكوس ضربى أوجده

[١] $\begin{pmatrix} -٣ & ٦ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$ [٢] $\begin{pmatrix} ٣ & ٦ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$ [٣] $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ [٤] $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ -١ & -١ \end{pmatrix}$

(٣) أوجد قيم أ التى تجعل لكل من المصفوفات التالية معكوساً ضربياً :

[١] $\begin{pmatrix} ٦ & ٣ \\ أ & ٢ \end{pmatrix}$ [٢] $\begin{pmatrix} أ & ٣ \\ ٢٧ & أ \end{pmatrix}$

[٣] $\begin{pmatrix} أ & ٢ \\ ٤ & أ - ٢ \end{pmatrix}$ [٤] $\begin{pmatrix} أ - ١ & ٠ \\ -٢ & أ - ٢ \end{pmatrix}$

(٤) حل كل نظام من المعادلات الخطية التالية بإستخدام المصفوفات:

[١] س + ٣ ص = ٥ ، ٤ س + ٣ ص = ٢

[٢] ٢ س − ص − ٣ = ٠ ، س − ص − ١ = ٠

[٣] ٢ س = ٧ ص + ١ ، ص = ٥ − س

(٥) عددان مجموعهما ١٠ و الفرق بينهما ٤ أوجد العددين بإستخدام المصفوفات

(٦) نصف الفرق بين عددين هو ٢ ، مجموع العدد الأكبر و ضعف العدد الأصغر هو ١٣ أوجد العددين بإستخدام المصفوفات

(٧) إذا كان ثمن ٤ كجم من الموز ، ٥ كجم من التفاح ١٢٠ جنيهاً ، كان ثمن ١٠ كجم من الموز ، ٥ كجم من التفاح ١٥٠ جنيهاً إستخدام المصفوفات فى إيجاد ثمن الكيلوجرام الواحد من كلاً من الموز و التفاح

(٨) إذا كان الخط المستقيم ص + أ س = حـ يمر بالنقطتين (١ ، ١) ، (٣ ، −٣) إستخدام المصفوفات فى إيجاد قيمة الثابتين أ ، حـ

(٩) إذا كان المنحنى ص = أ س^{٢} + ب س يمر بالنقطتين (١ ، ٤) ، (٢ ، ١٠) إستخدام المصفوفات فى إيجاد قيمة الثابتين أ ، ب

حل متباينات الدرجة الأولي فى متغير واحد

خواص علاقة التباين فى ح ⟸ إذا كان س ، ص ، ع ∈ ح فإن :

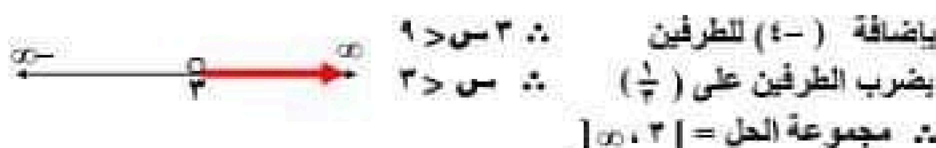
** إذا كان : س ≤ ص فإن : س + ع ≤ ص + ع لكل ع > ٠
س ع ≤ ص ع لكل ع > ٠
س ع ≥ ص ع لكل ع < ٠

** إذا كان : س ≥ ص فإن : س + ع ≥ ص + ع لكل ع > ٠
س ع ≥ ص ع لكل ع > ٠
س ع ≥ ص ع لكل ع < ٠

مثال ١

أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة الآتية ومثلها على خط الأعداد
٣س − ٤ > ٥

الحـــــــــل

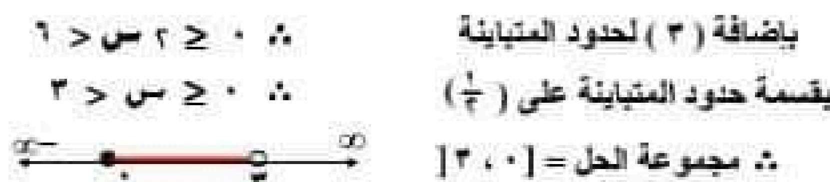


بإضافة (−٤) للطرفين ∴ ٣س > ٩
بضرب الطرفين على ($\frac{1}{3}$) ∴ س > ٣
∴ مجموعة الحل =] ٣ ، ∞ [

مثال ٢

أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة الآتية ومثلها على خط الأعداد
٣ > ٢س − ٣ ≥ −٣

الحـــــــــل

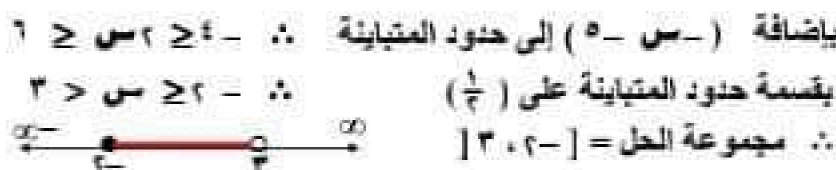


بإضافة (٣) لحدود المتباينة ∴ ٦ > ٢س ≥ ٠
بقسمة حدود المتباينة على ($\frac{1}{2}$) ∴ ٣ > س ≥ ٠
∴ مجموعة الحل = [٠ ، ٣ [

مثال ٣

أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة الآتية ومثلها على خط الأعداد
س + ١١ ≥ ٣س + ٥ ≥ س + ١

الحـــــــــل

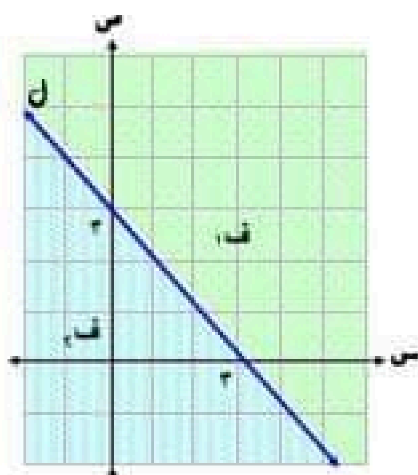


بإضافة (−س −٥) إلى حدود المتباينة ∴ ٦ ≥ ٢س ≥ −٤
بقسمة حدود المتباينة على ($\frac{1}{2}$) ∴ ٣ > س ≥ −٢
∴ مجموعة الحل = [−٢ ، ٣ [

حل متباينات الدرجة الأولى فى مجهولين

مثال ١

مثل بيانياً المعادلة : س + ص = ٣



الحــــــــــــــــــــل

س	٠	٣	١
ص	٣	٠	٢

يكفى نقطتى تقاطع المستقيم مع المحورين

و ذلك بوضع " س = ٠ ثم إيجاد قيمة ص "

، بوضع " ص = ٠ ثم إيجاد قيمة س "

والثالثة للتأكيد

المستقيم ل هو التمثيل البيانى للمعادلة : س + ص = ٣

ملاحظات ⇐ المستقيم ل يقسم المستوى إلى ثلاث مجموعات من النقط

(١) مجموعة نقط المستقيم ل وهى مجموعة النقاط التى تحقق معادلته ويسمى المستقيم الحدى

(٢) ف١ وهى مجموعة نقط المستوى والتى تقع على أحد جانبى المستقيم ل وهى نصف المستوى

(٣) ف٢ وهى مجموعة نقط المستوى والتى تقع على الجانب الآخر للمستقيم ل وهى النصف الآخر للمستوى

حل متباينات الدرجة الأولى فى مجهولين بيانيا ⇐

المتباينة من الدرجة الأولى فى مجهولين تشبه المعادلة الخطية الأولى فى مجهولين
و الفرق بينهما هو رمز المتباينة بدلا من وضع رمز التساوى

فمثلاً:

س + ص ≥ ٣ هى متباينة خطية

س + ص = ٣ هى معادلة خطية

خطوات تمثيل متباينة الدرجة الأولى فى متغيرين بيانياً ⇐

(١) نرسم المستقيم الحدى الذى يمثل المعادلة المناظرة للمتباينة

* إذا كانت علامة التباين [> أ، <] يكون المستقيم الحدى متقطع

* إذا كانت علامة التباين [≥ أ، ≤] يكون المستقيم الحدى متصل

(٢) نختار إحدى النقط فى أحد جانبى المستقيم الحدى " للسهولة نختار النقطة (٠ ، ٠) "
و نعوض بها فى الطرف الأيمن

* إذا حققت هذه النقطة المتباينة نظلل هذا الجانب و يكون هو مجموعة الحل

* إذا لم تحقق هذه النقطة المتباينة نظلل الجانب الآخر و يكون هو مجموعة الحل

مثال ٢

مثل بيانياً مجموعة المتباينة :
س + ص ≤ ٣

الحـــــــــــــل

نمثل بيانياً المستقيم الحدى : س + ص = ٣
كما فى المثال السابق " بخط متصل "
نعوض بالنقطة (٠ ، ٠) فى الطرف الأيمن
نجد : ٠ ≤ ٣ صواب
∴ (٠ ، ٠) يحقق المتباينة
، مجموعة الحل هى نصف المستوى الذى تنتمى إليه نقطة الأصل ∪ ل
و يمثلها المنطقة المظللة بالشكل المقابل

مثال ٣

إذا أراد محمد شراء نوعين من الكتب سعر النوع الأول جنيهان و سعر النوع الثانى ٤ جنيهات بحيث لا يدفع أكثر ١٢ جنيها فكم عدد الكتب التى يمكنه شراؤها من كل نوع

الحـــــــــــــل

نفرض أن عدد كتب النوع الأول = س ، عدد الكتب من النوع الثانى = ص
∴ ثمن شراء النوع الأول + ثمن شراء النوع الثانى ≤ الحد الأقصى للشراء
أى أن : ٢س + ٤ص ≤ ١٢
نرسم المستقيم الحدى: ٢س + ٤ص = ١٢
يمثل بخط متصل
نعوض بالنقطة (٠ ، ٠) فى الطرف الأيمن
نجد : ٠ ≤ ١٢ صواب
∴ (٠ ، ٠) يحقق المتباينة
يوضح التمثيل البيانى المقابل كل الحلول الممكنة

لاحظ ⇐

* نستخدم الربع الأول فقط لأنه لا يمكن شراء كمية سالبة من الكتب
* يمكن شراء كتابين من كل نوع أو ٤ كتب من النوع الأول ، و كتاب واحد من النوع الثانى أو. . . .
بحيث يدفع محمد ١٢جنيها
* يمكن شراء كتابين من النوع الأول و كتاب واحد من النوع الثانى أو. . . .
بحيث يدفع محمد أقل من ١٢جنيهاً

تمارين (٦)

(١) إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه فيما يلى :

[١] إذا كان : س ∈ ح فإن : مجموعة حل المتباينة ٣س + ١ > ٧ هى ....

١)] ٢ ، ∞ [٢) [٢ ، ∞ [٣)] −٢ ، ∞ [٤) [−٢ ، ∞ [

[٢] إذا كان : س ∈ ح فإن : مجموعة حل المتباينة

س < ٤ س < س + ٩ هى ....

١) [−٣ ، ٠]   ٢)] −٣ ، ٠ [٣)] ٠ ، ٣ [٤) [٠ ، ٣]

[٣] النقطة .... تقع فى منطقة حل المتباينة : ٢س + ٣ص ≤ ٦

١) (٢ ، −٣)   ٢) (−٤ ، −٥)   ٣) (٤ ، ٥)   ٤) (٠ ، ٠)

[٤] النقطة .... لا تقع فى منطقة حل المتباينة : ص ≤ ٢س + ٤

١) (١ ، ٦)   ٢) (−١ ، ٦)   ٣) (٠ ، ٤)   ٤) (٤ ، ٠)

[٥] إذا كان : ل هو المستقيم الحدى للمتباينة : س + ص < ٤

فإن : ل .... مجموعة حل المتباينة

١) ∈   ٢) ∉   ٣) ⊂   ٤) ⊄

[٦] نقط المستقيم الحدى للمتباينة : (٢س + ٣ص ≤ ٦) .... مجموعة الحل

١) ∈   ٢) ∉   ٣) ⊂   ٤) ⊄

(٢) أوجد مجموعة حل المتباينات الآتية :

[١] −١ < ٤ + ٥س ≤ ٥

[٢] س − ١ < ٣س − ٥

[٣] ٢س + ٣ ≤ ٣س + ٢ ≤ س + ٧

(٣) مثل بيانياً مجموعة حل كلاً من المتباينات الآتية حيث : س ، ص ∈ ح

[١] س > ص   [٢] س + ٢ص ≤ ٤

[٣] ٣س + ٥ص > ١٥   [٤] ص > س − ١

[٥] س − ص > ٤ − س   [٦] ٤س + ٣ص < ١٢

[٧] ص > ٢س + ٣   [٨] ٢س − ٥ص < ١٠

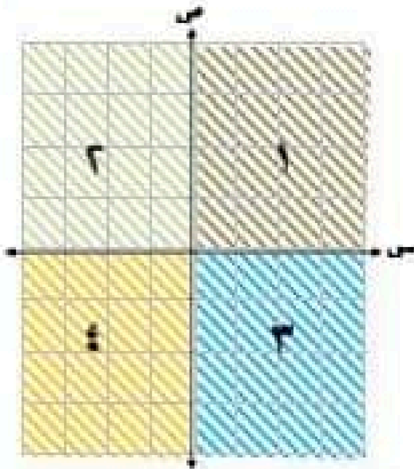
(٤) إذا أراد حسن شراء حمص و فول سودانى لزوم رحلة له و لعائلته بحيث لا يدفع أكثر ٤٨ جنيهاً ، و كان سعر الحمص ٨ جنيهات و سعر الفول السودانى ١٦ جنيهاً فكم كيلوجراماً يمكن لحسن شراؤه من كل نوع

(٥) مصنع صغير لإنتاج الملابس الجاهزة لديه ٦٠ متراً القماش و ينتج نوعين من الثياب فإذا كان النوع يحتاج ٣ متر ، و النوع الثانى يحتاج ٢,٥ متر فكم عدد الأثواب التى يمكن للمصنع أن ينتجها من كل نوع

حل أنظمة من المتباينات الخطية بيانيا

نظام المتباينات الخطية ⟸ تكون متباينتان خطيتان أو أكثر معاً نظاماً من المتباينات الخطية و يكون الزوج المرتب (س، ، ص،) حلاً لهذا النظام إذا حقق جميع متبايناته

ملاحظة ⟸ يمكن وصف كل ربع من أرباع مستوى إحداثى متعامد باستخدام نظام من المتباينات الخطية



فمن الشكل المقابل :

الربع الأول : س > ٠ ، ص > ٠

الربع الثانى : س < ٠ ، ص > ٠

الربع الثالث : س < ٠ ، ص < ٠

الربع الأول : س > ٠ ، ص < ٠

حل نظام من المتباينات الخطية بيانياً ⟸

حل نظام من المتباينات الخطية يعنى إيجاد جميع الأزواج المرتبة التى تحقق متبيانات هذا النظام و لتحديد جميع النقاط (الأزواج المرتبة) التى تشكل حلا للنظام يتم تظليل منطقة حل متباينة من هذه المتباينات فى مستوى إحداثى واحد فتكون المنطقة المشتركة بين مناطق حل جميع المتباينات هى منطقة حل هذا النظام

مثال ١

حل نظام المتباينات الخطية التالى بيانيا ٢س + ص ≤ ٤ ، ص > −١

الحـــــــــــــل

للمتباينة الأولى : ٢ س + ص ≤ ٤

نرسم المستقيم الحدى ل١ : ٢س + ص = ٤ بخط متصل

و يمر بالنقطتين (٢ ، ٠) ، (٠ ، ٤)، النقطة (٠ ، ٠) لا تحقق المتباينة

∴ مجموعة حل المتباينة ٢س + ص ≤ ٤ هى ف١

نصف المستوى الذى لا تنتمى إليه النقطة (٠ ، ٠)

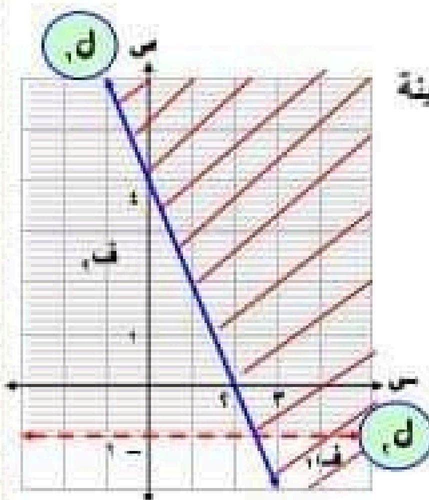
للمتباينة الثانية : ص > −١

نرسم المستقيم الحدى ل٢ : ص = −١ بخط متقطع

و يمر بالنقطة (٠ ، −١) ، النقطة (٠ ، ٠) تحقق المتباينة

∴ مجموعة حل المتباينة ص > −١ هى ف٢

نصف المستوى الذى تنتمى إليه النقطة (٠ ، ٠)



و تكون مجموعة حل المتباينتين هى : ف = ف١ ∩ ف٢

كما بالشكل المقابل مع ملاحظة أن نقط المستقيم ل١ ⊂ ف

، نقط المستقيم ل٢ ⊄ ف

التحقق :

لاحظ أن النقطة (٣ ، ١) تنتمى إلى منطقة حل النظام
لذا يمكن إستخدامها نقطة إختبار ، و التحقق من صحة الحل بالتعويض عن
(س ، ص) بالنقطة (٣ ، ١) فى كلتا المتباينتين

٢س + ص ≤ ٤
٢×٣ + ١ ≤ ٤
٧ ≤ ٤ صواب

ص > −١
٣×٠ + ١ > −١
١ > −١ صواب

مثال ٢

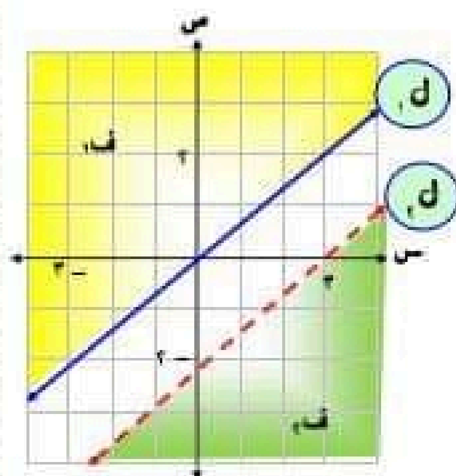
حل نظام المتباينات الخطية التالى بيانياً

٢س − ٣ص ≥ ٠ ، ٤س − ٦ص > ١٢

الحــــــــــــــل

للمتباينة الأولى : ٢س − ٣ص ≥ ٠

نرسم المستقيم الحدى $ل_١$: ٢س − ٣ص = ٠ بخط متصل
و يمر بالنقطتين (٣ ، ٢) ، (−٣ ، −٢) ، النقطة (٠ ، ٠) تقع على $ل_١$



لذا نختار نقطة أخرى و لتكن (١ ، ١) للإختبار
٢×١ − ٣×١ ≥ ٠
∴ −١ ≥ ٠ صواب
∴ مجموعة الحل هى $ف_١$
نصف المستوى الذى تنتمى إليه النقطة (١ ، ١) ∪ $ل_١$

للمتباينة الثانية : ٤س − ٦ص > ١٢

نرسم المستقيم الحدى $ل_٢$: ٤س − ٦ص = ١٢
بخط متقطع و يمر بالنقطتين (٣ ، ٠) ، (٠ ، −٢)
، النقطة (٠ ، ٠) لا تحقق المتباينة

∴ مجموعة الحل هى $ف_٢$ نصف المستوى الذى تنتمى إليه النقطة (٠ ، ٠)

و تكون مجموعة حل المتباينتين هى : ف = $ف_١$ ∩ $ف_٢$ = ∅

و يلاحظ أن : $ل_١$ // $ل_٢$ ، و لا توجد منطقة مشتركة بين المنطقتين المظللتين

المتجهات

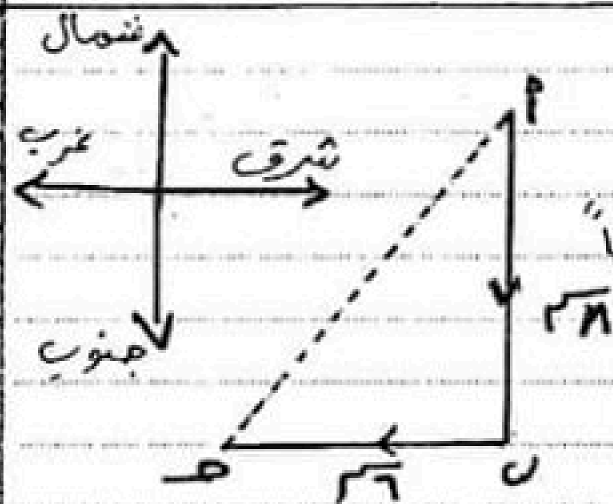
الكميات

الكمية القياسية ← تتحدد تماما بمعرفة مقدارها فقط
[الطول - المساحة - الكتلة ...

الكمية المتجهة ← تتحدد تماماً بمعرفة مقدارها واتجاهها
[السرعة - القوة - الإزاحة ...

الإزاحة

هي كمية متجهة وهي المسافة المقطوعة في اتجاه معين



فمثلا من الشكل المقابل

إذا تحرك جسم من النقطة (أ) مسافة ٨ متراً جنوباً
ثم غير اتجاهه ٦م غرباً ثم توقف عند (جـ)
فإن المسافة التي قطعها الجسم = ٨ + ٦ = ١٤م
وتكون الإزاحة الحادثة خلال الحركة هي جـ أ

أي أن الإزاحة = $\sqrt{٦٤+٣٦}$ = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠م في اتجاه جـ أ

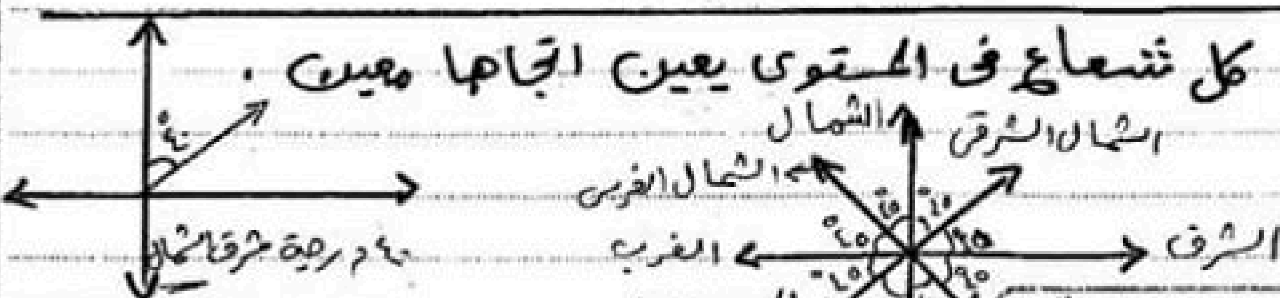
ف الشكل المقابل

أ ——— ٣م ——— ب ——— ٥م ——— جـ

احسب المسافة والإزاحة الحادثة عندما يتحرك من النقطة أ إلى النقطة جـ
ثم يعود إلى النقطة ب المسافة =
الإزاحة =

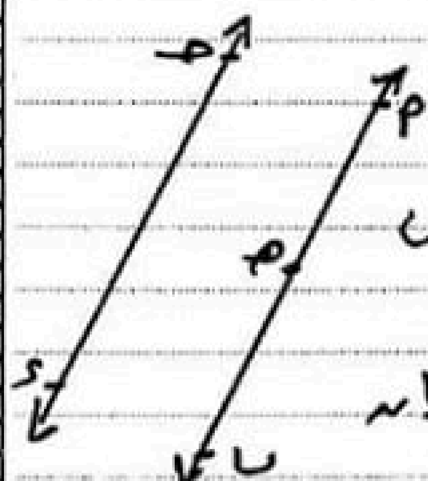
الاتجاه

كل شعاع في المستوى يعين اتجاها معين .



أ/ مصطفى فوزي سيد

إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـ د}$ ، هـ ∈ $\overline{أب}$ فإن



← $\overrightarrow{هـ أ}$ ، $\overrightarrow{ب هـ}$ لهما نفس الاتجاه وحاملهما مستقيم واحد
← $\overrightarrow{هـ أ}$ ، $\overrightarrow{د جـ}$ لهما نفس الاتجاه وحاملهما مستقيمان متوازيان
← $\overrightarrow{هـ أ}$ ، $\overrightarrow{هـ ب}$ في اتجاهين متضادين وحاملهما مستقيم واحد
← $\overrightarrow{هـ أ}$ ، $\overrightarrow{جـ د}$ في اتجاهين متضادين وحاملهما مستقيمان متوازيان

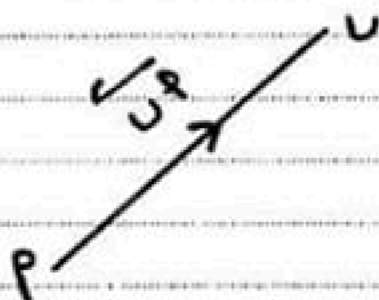
بصفة عامة

← الشعاعان المتحدان في الاتجاه أو المتضادان في الاتجاه حاملهما مستقيم واحد أو مستقيمان متوازيان والعكس صحيح.

← الشعاعان المختلفان في الاتجاه لا يمكن أن يحملهما مستقيم واحد أو مستقيمان متوازيان

القطعة المستقيمة الموجهة

هي قطعة مستقيمة لها بداية ونقطة نهاية واتجاه.



← نقطة البداية "أ"
← نقطة النهاية "ب"
← الاتجاه من أ إلى ب

لاحظ ← $أب = ب أ$ ، $\overline{أب} \equiv \overline{ب أ}$

لكن ← $\overrightarrow{أب} \neq \overrightarrow{ب أ}$ بينما $\overrightarrow{أب} = -\overrightarrow{ب أ}$

≡ يقرأ يكافئ

معيار القطعة المستقيمة الموجهة:- معيار $\overrightarrow{أب}$ هو طول $\overline{أب}$ ويرمز له بـ $\|\overrightarrow{أب}\|$

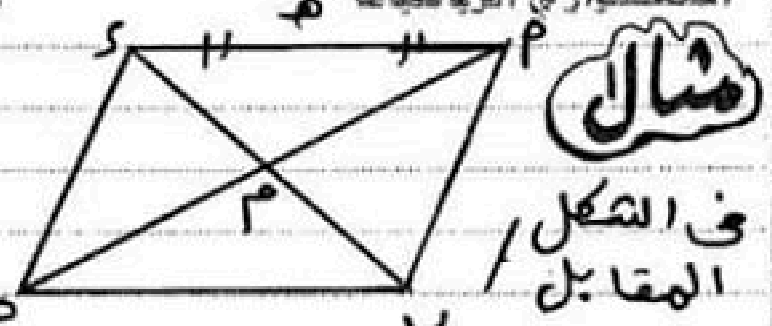
$$\|\overrightarrow{أب}\| = \|\overrightarrow{ب أ}\| = أب$$

تكافؤ قطعتين مستقيمتين موجهتين

يقال لقطعتين موجهتين أنهما متكافئتان إذا كان لهما نفس المعيار (الطول) والاتجاه

مثال

في الشكل المقابل



أ ب جـ ء متوازي أضلاع تتقاطع قطراه في م ، هـ منتصف $\overline{أء}$

أولاً: اذكر القطع المستقيمة الموجهة (إن وجدت) التي تكافئ

[١] $\overrightarrow{أب}$ [٢] $\overrightarrow{ءأ}$ [٣] $\overrightarrow{مب}$

[٤] $\overrightarrow{أم}$ [٥] $\overrightarrow{أهـ}$ [٦] $\overrightarrow{مجـ}$

ثانياً: بين لماذا تكون القطع المستقيمة الموجهة التالية غير متكافئة

[١] $\overrightarrow{ءم}$ ، $\overrightarrow{وب}$ [٢] $\overrightarrow{أء}$ ، $\overrightarrow{هـب}$ [٣] $\overrightarrow{أم}$ ، $\overrightarrow{مجـ}$

أولاً [١] $\overrightarrow{ءجـ}$ [٢] $\overrightarrow{جـب}$ [٣] $\overrightarrow{ءم}$

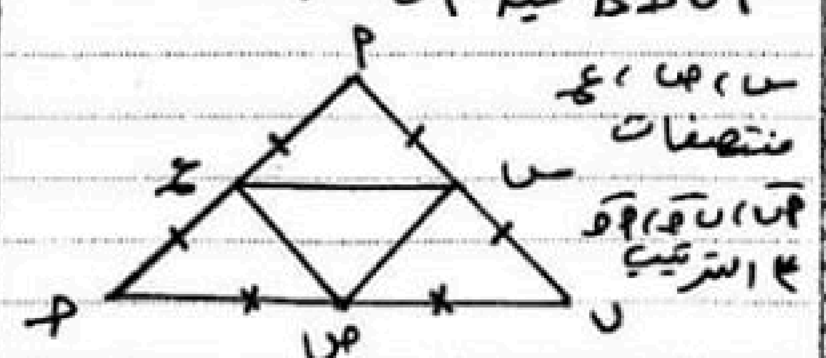
[٤] $\overrightarrow{مجـ}$ [٥] $\overrightarrow{هـء}$ [٦] لا يوجد

مثال

في الشكل المقابل

أ ب جـ △ فيه أب = أجـ

س ، ص ، ع منتصفات $\overline{أب}$ ، $\overline{بجـ}$ ، $\overline{أجـ}$ على الترتيب



اكتب القطع المستقيمة الموجهة (إن وجدت) والتي تكافئ كلاً مما

[أ] $\overrightarrow{سس}$ [ب] $\overrightarrow{أع}$

[جـ] $\overrightarrow{سع}$ [ء] $\overrightarrow{جـص}$

[هـ] $\overrightarrow{سص}$ [و] $\overrightarrow{عص}$

الحل

[أ] [ب] [جـ]

[ء] [هـ] [و]

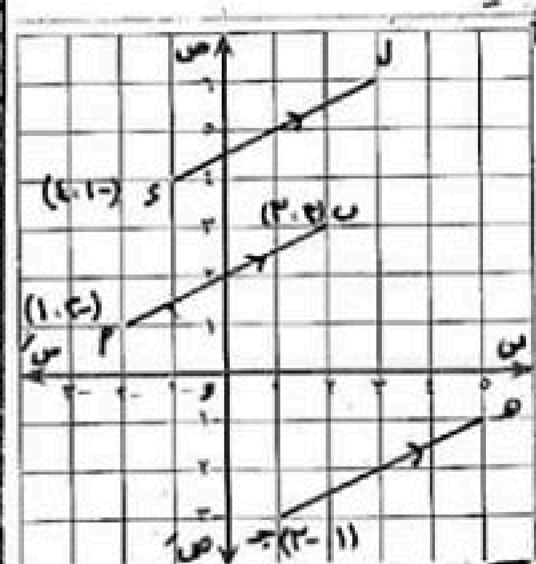
مثال ٢

في مستوى احداثي متعامد عين النقط أ(-٢،١) ، ب(٢،٣)

جـ(١،-٣) ، ء(-١،٤) ثم ارسم $\overrightarrow{جـهـ}$ ، $\overrightarrow{ءل}$ كل منها يكافئ $\overrightarrow{أب}$

ثم أوجد إحداثي هـ ، ل

الحل



← باختيار أن هـ صورة (أ) بالانتقال

الانتقال = (١،-٣) - (-٢،١) = (٣،-٤)

∴ احداثي هـ = (٢،٣) + (٣،-٤)

= (٢+٣ ، ٣-٤) = (٥ ، -١) أرسم

وعين ل

مصطفى فواز سيد
01118275262

مثال ٤

في مستوى إحداثي متعامد إذا كانت أ(٤ ، -٣) ، ب(٤ ، ٤) ، جـ(-٣ ، -١) وكانت كل من القطع المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{جـد}$ ، $\overrightarrow{وم}$ ، $\overrightarrow{نو}$ متكافئة حيث و نقطة الأصل أوجد إحداثي كل من د ، م ، ن

الحل

صورة ب بالانتقال (-٣-٤ ، -١-٤)
= (-٧ ، -٥)

∴ د صورة م بنفس الانتقال

∴ إحداثيات نقطة د هي (-٣ ، -٨) ، نقطة م هي (٠ ، -٧) ، نقطة ن هي (٠ ، ٧)

مثال ٥

في مستوى إحداثي متعامد أ(٢ ، ٣) ، ب(-٣ ، ١) ، جـ(٥ ، -١)

١) ارسم $\overrightarrow{جـد}$ تكافئ $\overrightarrow{أب}$ وعين إحداثي النقطة د

٢) عين إحداثي النقطة م منتصف $\overline{بجـ}$ ثم حدد القطع المستقيمة الموجهة التي تكافئ

أ) $\overrightarrow{بم}$ ب) $\overrightarrow{أم}$ جـ) $\overrightarrow{أجـ}$ د) $\overrightarrow{دب}$

٣) هل الشكل أ جـ د ب متوازي أضلاع

الحل

١) باستخدام الانتقال حيث أن جـ هي صورة أ بالانتقال (٥-٢ ، -١-٣) ∴
= (٣ ، -٤)

∴ د هي صورة ب بنفس الانتقال

∴ د = (-٣+٣ ، ١-٤) = (٠ ، -٣)

٢) ∵ م منتصف $\overline{بجـ}$

∴ م = $\left(\frac{-٣+٥}{٢} ، \frac{١-١}{٢}\right)$ = (١ ، ٠)

أ) $\overrightarrow{بم} = \overrightarrow{مجـ}$

وتكافئ أي قطعة مستقيمة أخرى لها نفس المعيار والاتجاه

ب) $\overrightarrow{أم} = \overrightarrow{مد}$

جـ) $\overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{بد}$

د) $\overrightarrow{دب} = \overrightarrow{جـأ}$

٣) ∵ $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{جـد}$ ∴ أب = جـد ، $\overline{أب} \parallel \overline{جـد}$

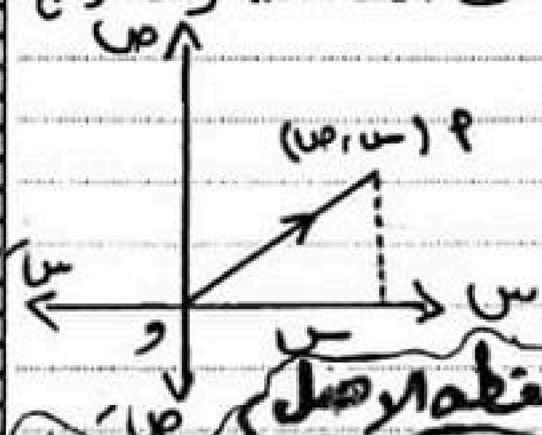
بالمثل $\overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{بد}$

∴ أجـ = بد ، $\overline{أجـ} \parallel \overline{بد}$

ارسم الشكل بنفسك *

01118275262
أ/ مصطفى فواز سيد

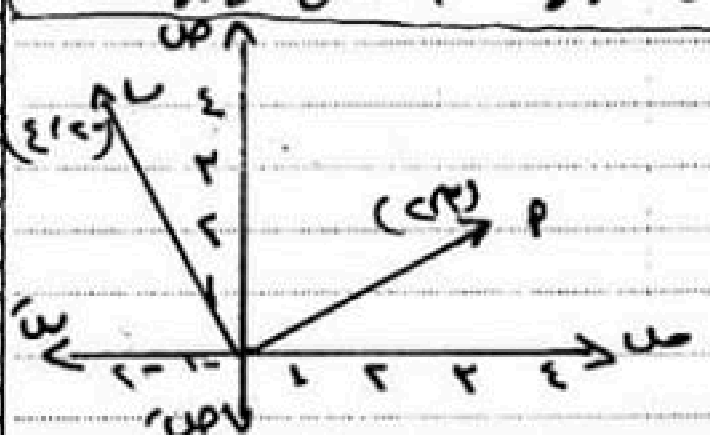
يمكن تعيين موضع النقطة م من المستوى الاحداثي المتعامد بمعرفة الزوج المرتب (س ، ص)



حيث لكل نقطة في المستوى الاحداثي موضع وحيد بالنسبة لنقطة الاصل (و)

متجه الموضع لنقطة معلومة بالنسبة لنقطة الاصل

هو القطعة المستقيمة الموجهة التي يبدأ بها نقطة الاصل ونهايتها النقطة المعلومة

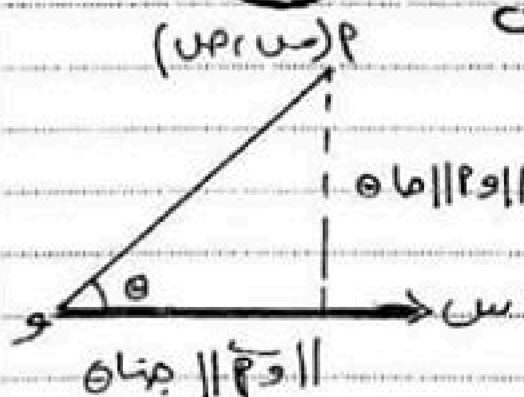


مثلاً
اذا كانت م (٣، ٢) ، ب (-٢، ٤)
فإن و م هو متجه الموضع لنقطة م بالنسبة لنقطة الاصل ويكتب $\overrightarrow{وم}$ = (٣، ٢)
وهكذا متجه الموضع لنقطة ب
$\overrightarrow{وب}$ = (-٢، ٤)

ملاحظة نظراً لان كل متجهات الموضع لها نفس نقطة البداية (و) فإن يمكننا استبدال $\overrightarrow{وم}$ بـ $\overrightarrow{م}$ و $\overrightarrow{وب}$ بـ $\overrightarrow{ب}$

أي أن $\overrightarrow{م}$ = (٣، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (-٢، ٤)

الصورة القطبية لمتجه الموضع



$\overrightarrow{وم}$ يصنع زاوية ه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات
كما أن معياره يساوي || $\overrightarrow{م}$ ||
فيكون $\overrightarrow{وم}$ = (|| $\overrightarrow{وم}$ || ، ه) ← الصورة القطبية

احداثيا النقطة م في المستوى المتعامد

س = || $\overrightarrow{وم}$ || جتا ه

ص = || $\overrightarrow{وم}$ || جا ه

ظا ه = $\frac{ص}{س}$

أ/ مصطفى فواز سيد
01118275262

معيار المتجه

هو طول القطعة المستقيمة الممثلة للمتجه

فإذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (س، ص) فإن معيار (طول)

المتجه $\overrightarrow{أ}$ يرمز له بالرمز ||$\overrightarrow{أ}$|| حيث ||$\overrightarrow{أ}$|| = $\sqrt{س^2 + ص^2}$

مثال ٦

في مستوى احداثي متعامد أ(٣، -٤)، ب(-١٢، ٥)، جـ(-٣، -٦) أوجد متجه الموضع لكل من النقط أ، ب، جـ بالنسبة لنقطة الأصل و(٠، ٠) ثم أوجد معيار كل منها

الحل

متجه الموضع لنقطة أ هو $\overrightarrow{و أ}$ = (٣، -٤)

متجه الموضع لنقطة ب هو $\overrightarrow{و ب}$ = (-١٢، ٥)

متجه الموضع لنقطة جـ هو $\overrightarrow{و جـ}$ = (-٣، -٦)

||$\overrightarrow{و أ}$|| = ||$\overrightarrow{أ}$|| = $\sqrt{(٣)^2 + (-٤)^2}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول

||$\overrightarrow{و ب}$|| = ||$\overrightarrow{ب}$|| = $\sqrt{(-١٢)^2 + (٥)^2}$ = ١٣ وحدة طول

||$\overrightarrow{و جـ}$|| = ||$\overrightarrow{جـ}$|| = $\sqrt{(-٣)^2 + (-٦)^2}$ = $٣\sqrt{٥}$ وحدة طول

مثال ٧

في مستوى احداثي متعامد إذا كانت أ(٦، $٦\sqrt{٣}$) أوجد الصورة القطبية لمتجه الموضع للنقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل و.

الحل

∵ $\overrightarrow{و أ}$ = (٦، $٦\sqrt{٣}$)

||$\overrightarrow{و أ}$|| = طول $\overline{أ و}$

$\overrightarrow{و أ}$ = $\sqrt{(٦)^2 + (٦\sqrt{٣})^2}$

= $\sqrt{٣٦ + ١٠٨}$ = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢

ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{٦\sqrt{٣}}{٦}$ = $\sqrt{٣}$

∴ هـ = ٦٠° ∵ هـ ∈]٠، $\frac{\pi}{٢}$[

∴ $\overrightarrow{و أ}$ = (١٢، $\frac{\pi}{٣}$)

مثال ٨

في مستوى احداثي متعامد إذا كان $\overrightarrow{و أ}$ = (-$\sqrt{٣}$، ١) أوجد المتجه $\overrightarrow{و أ}$ في الصورة القطبية

الحل

[(٢، $\frac{٥\pi}{٦}$)]

01118275262

مصطفى فواز سيد

مثال ٩ إذا كان $\overrightarrow{ول} = (١٢\sqrt{٢}، \frac{٣}{٤}\pi)$ متجه موضع لنقطة ل بالنسبة لنقطة الاصل فأوجد احداثي النقطة ل

الحل

$\because \overrightarrow{ول} = (\|\overrightarrow{ول}\|، \theta) = (١٢\sqrt{٢}، \frac{٣}{٤}\pi)$

$= (١٢\sqrt{٢}، ١٣٥^\circ)$ الصورة القطبية

$\therefore س = \|\overrightarrow{ول}\| جتا \theta = ١٢\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥°

$= ١٢\sqrt{٢} \times (\frac{-١}{\sqrt{٢}}) = -١٢$

$\therefore ص = \|\overrightarrow{ول}\|$ جا $\theta = ١٢\sqrt{٢}$ جا ١٣٥°

$= ١٢\sqrt{٢} \times (\frac{١}{\sqrt{٢}}) = ١٢$

$\therefore$ احداثي نقطة (ل) = $(-١٢، ١٢)$

الواجب

[١] أكمل

[١] الكمية القياسية يلزم لتعريفها تعريفاً تاماً معرفة ....

[٢] الكمية المتجهة يلزم لتعريفها تعريفاً تاماً يلزم معرفة .... و ....

[٣] القطعة المستقيمة الموجهة هي قطعة مستقيمة لها .... و .... و ....

[٤] تتكافئ القطعتان المستقيمتان الموجهتان إذا كان لهما ....

---

[٢] في مستوى احداثي متعامد م (٣، ٢) ب (-٢، ٦) جـ (٥، -٣) د (٢، ٥)

ارسم $\overrightarrow{مجـ}$ ، $\overrightarrow{لد}$ واثبت كل منهما تكافئ $\overrightarrow{م ب}$ واوجد احداثي كل من جـ ، ل ، ر

---

[٣] في مستوى احداثي متعامد أ (٣، -٢) ب (٦، ٢) جـ (١، ٣) ، د (٤، ٧)

① اذا كان كل من القطع المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{ب جـ}$ ، $\overrightarrow{أم}$ ، $\overrightarrow{نـد}$ ، $\overrightarrow{ور}$ متكافئة اوجد احداثي كل من م ، ن ، ر حيث و نقطة الاصل

② أثبت أن $\overrightarrow{أب}$ تكافئ $\overrightarrow{جـد}$

---

[٤] اوجد الصورة القطبية لكل من المتجهات الاتية

① $\overrightarrow{ود} = (٨\sqrt{٣}، ٨)$

② $\overrightarrow{وث} = (٥، ٥\sqrt{٣})$

③ $\overrightarrow{م} = ٤\sqrt{٣}\ \overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص}$

④ $\overrightarrow{ن} = ٣\sqrt{٢}\ \overrightarrow{س} + ٣\sqrt{٢}\ \overrightarrow{ص}$

---

[٥] إذا كان $\overrightarrow{وأ}$ متجه موضع النقطة أ بالنسبة لنقطة الاصل و أوجد احداثي النقطة أ في كل مما يأتي

① $\overrightarrow{وأ} = (٥\sqrt{٢}، \frac{٣}{٤}\pi)$

② $\overrightarrow{وأ} = (٢٤، ١٥٠)$

③ $\overrightarrow{وأ} = (٦، \frac{٥}{٣}\pi)$

④ $\overrightarrow{وأ} = (١٢\sqrt{٣}، ٦٠)$

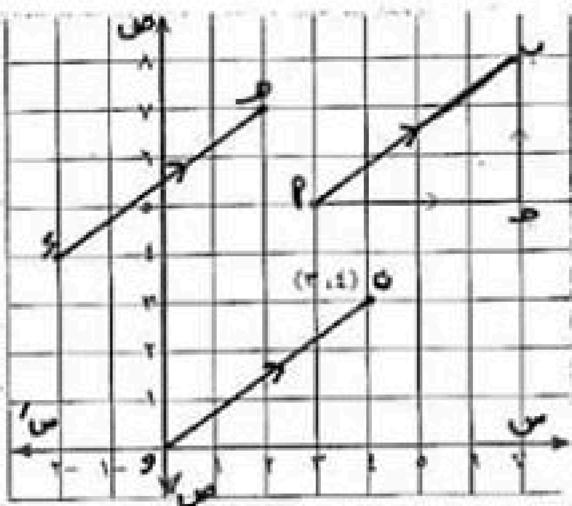
العمليات على المتجهات

المتجهات: عناصر المجموعة ح² مع عمليتي الجمع والضرب المعرفتين عليها تسمى متجهات

المتجه الصفري: يعرف $\vec{0}$ = (٠، ٠) بالمتجه الصفري

ويكون ‖$\vec{0}$‖ = ٠ والمتجه الصفري غير معين الاتجاه

المتجهات المتكافئة: كل متجه $\vec{م}$ = (س₁، ص₁) يمكن تمثيله هندسياً بالعديد من القطع المستقيمة الموجهة المتكافئة والتي كل منها تكافئ متجه الموضع للنقطة م = (س₁، ص₁)



لنفرض أن: جسماً تحرك من م حتى وصل الى ب بعد أن قطع ٤ وحدات الى اليمين و ٣ وحدات الى أعلى فإن $\overrightarrow{مب}$ تمثل متجه ازاحة الجسم من م الى ب ويمكننا تمثيل $\overrightarrow{مب}$ في المستوى الاحداثي المتعامد بعدد غير منته من القطع المستقيمة الموجهة المتوازية والتي تكافئ كل منها $\overrightarrow{مب}$

أي أن: $\overrightarrow{مب}$ = $\overrightarrow{جـ د}$ = ... = $\overrightarrow{و هـ}$ = (٣، ٤)

ويكون ‖$\overrightarrow{مب}$‖ = ‖$\overrightarrow{جـ د}$‖ = ... = ‖$\overrightarrow{و هـ}$‖ = $\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدات طول

جمع المتجهات جبرياً

لكل $\vec{م}$ = (س₁، ص₁) ∈ ح²

، $\vec{ب}$ = (س₂، ص₂) ∈ ح²

يكون $\vec{م}$ + $\vec{ب}$ = (س₁ + س₂، ص₁ + ص₂) ∈ ح²

أ/ مصطفى فواز سيد
01118275262

خواص عملية الجمع (الانغلاق، الابدال، .... الخ)

ضرب متجه في عدد حقيقي: لكل $\overrightarrow{أ} = (س ، ص) \in ح^2$ ، لكل ك $\in$ ح

فإن: $ك \overrightarrow{أ} = ك (س ، ص) = (ك س ، ك ص)$

تكافؤ قطعتين مستقيمتين موجهتين

تتكافأ القطعتان المستقيمتان الموجهتان اذا كان لهما نفس الطول ونفس الاتجاه بمعنى: اذا كانت: $\overline{أب}$ يكافئ $\overline{جـ د}$ فإن $\|أب\| = \|جـ د\|$ ، $\overline{أب} \parallel \overline{جـ د}$ وبنفس الاتجاه

المتجهان: اذا كان $\overrightarrow{م} = (س_1 ، ص_1)$ يكافئ $\overrightarrow{ن} = (س_2 ، ص_2)$

فإن: $س_1 = س_2$ ، $ص_1 = ص_2$ ونقول عندئذ المتجه $\overrightarrow{م}$ = المتجه $\overrightarrow{ن}$

متجه الوحدة: هو متجه معياره الوحدة (الواحد الصحيح)

مثال: اذا كان $\overrightarrow{أ} = (2 ، 1)$ ، $\overrightarrow{ب} = (3 ، -2)$ ، $\overrightarrow{جـ} = (-4 ، 5)$

أوجد $2\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ}$

الحل

$2\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ} = 2(2 ، 1) - (3 ، 2) + (-4 ، 5)$

$= (4 ، 2) + (-3 ، 2) + (-4 ، 5)$

$= (4 - 3 - 4 ، 2 + 2 + 5)$

$= (-3 ، 9)$ #

مثال: اذا كان $\overrightarrow{أ} = (6 ، 1)$ ، $\overrightarrow{ب} = (1 ، 2)$ أوجد $\|\overrightarrow{أ} - 2\overrightarrow{ب}\|$

الحل

$\because \overrightarrow{أ} - 2\overrightarrow{ب} = (6 ، 1) - 2(1 ، 2)$

$= (4 ، -3)$

$\therefore \|\overrightarrow{أ} - 2\overrightarrow{ب}\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2}$

$= \sqrt{25} = 5$ وحدة طول

اذا كانت $\overrightarrow{أ} = (2 ، 1)$ ، $\overrightarrow{ب} = (0 ، 2)$ ، $\overrightarrow{جـ} = (2 ، 3)$

أوجد $\|\overrightarrow{أ} - 2\overrightarrow{ب} + 3\overrightarrow{جـ}\|$

مثال ٢

اذا كان $\vec{a}$ = (٣، ١) ، $\vec{b}$ = (-٦، ٤) ، $\vec{c}$ = (٠، ٢)

① أثبت أن ٢$\vec{a}$ + $\vec{b}$ - ٣$\vec{c}$ = $\vec{0}$

② أوجد $\vec{d}$ حيث $\vec{c}$ - $\vec{d}$ = ٢($\vec{a}$ + $\vec{b}$)

الحل

[1] الأيمن = ٢(٣، ١) + (-٦، ٤) - ٣(٠، ٢)

= (٦، ٢) + (-٦، ٤) + (٠، -٦)

= (٦ - ٦ + ٠) س + (٢ + ٤ - ٦) ص

= ٠ س + ٠ ص = $\vec{0}$ = الأيسر *

[2] $\vec{a}$ + $\vec{b}$ = (٣، ١) + (-٦، ٤) = (-٣، ٥)

٢($\vec{a}$ + $\vec{b}$) = ٢(-٣، ٥) = (-٦، ١٠)

∴ $\vec{c}$ - $\vec{d}$ = ٢($\vec{a}$ + $\vec{b}$)

∴ $\vec{d}$ = $\vec{c}$ - ٢($\vec{a}$ + $\vec{b}$)

= (٠، ٢) - (-٦، ١٠) = (٦، -٨)

*

⇐ إذا كان $\vec{a}$ = (٢، ١) ، $\vec{b}$ = (١، -١) ، $\vec{c}$ = (٧، -١)

فأوجد قيمة ك التي تحقق ٢$\vec{a}$ + ك$\vec{b}$ = $\vec{c}$

خلي بالك فكرة ولا أجمل

كيفية كتابة متجه بدلالة متجهين

مثلا $\vec{c}$ عايز أكتبه بدلالة $\vec{a}$ ، $\vec{b}$

⇐ يبقى $\vec{c}$ = ثابت × $\vec{a}$ + ثابت × $\vec{b}$

(الثابت الأول ↓ ك ، الثابت الثاني ↓ ل)

، نطلع معادلتين ونحلهم

، نطلع قيم ك ، ل ثم نعوض مباشرة عن المتجه $\vec{c}$

مثال ٣

إذا كانت $\vec{a}$ = (٢، -٣) ، $\vec{b}$ = (٣، ٥) عبر عن المتجه $\vec{c}$ حيث $\vec{c}$ = (١٢، ١) بدلالة $\vec{a}$ ، $\vec{b}$

الحل

نفرض أن $\vec{c}$ = ك$\vec{a}$ + ل$\vec{b}$

∴ ك(٢، -٣) + ل(٣، ٥) = (١٢، ١)

∴ ٢ك + ٣ل = ١٢ ← ①

-٣ك + ٥ل = ١ ← ②

بضرب ① × ٣ ، ② × ٢ والجمع

∴ ٦ك + ٩ل = ٣٦ ← ①'

-٦ك + ١٠ل = ٢ ← ②'

١٩ل = ٣٨ ⇐ ل = ٢ بالتعويض في ①

٢ك + ٣ × ٢ = ١٢

٢ك = ١٢ - ٦ ⇐ ٢ك = ٦

ك = ٣

∴ $\vec{c}$ = ٣$\vec{a}$ + ٢$\vec{b}$ *

⇐ إذا كان $\overline{أ}$ = (٣، -٢) ، ب (-٢، ٥) ، جـ (٠، ١) || عبر عن $\overline{جـ}$ بدلالة $\overline{أ}$ ، ب

متجها الوحدة الأساسيان

$\overline{س}$ = (١، ٠) اتجاهه هو محور السينات الموجب

$\overline{ص}$ = (٠، ١) اتجاهه هو محور الصادات الموجب

مثال ٥ إذا كان $\overline{أ}$ = (٢، -٣) ، $\overline{ب}$ = (٤، ١) ، $\overline{جـ}$ = (٠، ٣)

اكتب كل من المتجهات $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ ، $\overline{جـ}$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين

ثم أوجد ① $\overline{أ}$ + ٢ب ② ||$\overline{جـ}$|| ③ ||ب - $\frac{1}{3}$ $\overline{جـ}$||

الحل

$\overline{أ}$ = ٢$\overline{س}$ - ٣$\overline{ص}$ ، $\overline{ب}$ = ٤$\overline{س}$ + $\overline{ص}$ ، $\overline{جـ}$ = ٣$\overline{ص}$

① $\overline{أ}$ + ٢ب = ٢$\overline{س}$ - ٣$\overline{ص}$ + ٢(٤$\overline{س}$ + $\overline{ص}$) = ١٠$\overline{س}$ - $\overline{ص}$

② ||جـ|| = $\sqrt{(0)^2 + (3)^2}$ = ٣ وحدة طول

③ ||ب - $\frac{1}{3}$ $\overline{جـ}$|| = ||(٤$\overline{س}$ + $\overline{ص}$) - $\frac{1}{3}$ (٣$\overline{ص}$)||

= ||(٤$\overline{س}$ + $\overline{ص}$) + (-$\overline{ص}$)|| = ||٤$\overline{س}$|| = $\sqrt{4^2}$ = ٤ وحدة طول

مثال ٦ أوجد بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين المتجه الذي يعبر عن

① السرعة المنتظمة لسيارة تقطع ٩٠ كم كل ساعة في اتجاه الشرق

② قوة مقدارها ٥٠ نيوتن تؤثر في نقطة مادية في اتجاه ٣٠° شمال الشرق

الحل ① بفرض أن متجه الموضع لسرعة السيارة ع = (س، ص)

∴ س = ٩٠ ، ص = ٠ ∴ ع = ٩٠$\overline{س}$

② س = ٥٠ جتا ٣٠ = ٢٥$\sqrt{3}$

ص = ٥٠ جا ٣٠ = ٢٥

$\overline{جـ}$ = ٢٥$\sqrt{3}$ $\overline{س}$ + ٢٥$\overline{ص}$

توازي وتعامد متجهين

الميل = $\frac{ص}{س}$

① شرط التوازي م١ = م٢

$\frac{ص_1}{س_1} = \frac{ص_2}{س_2}$

أو ص١ س٢ − ص٢ س١ = ٠

② شرط التعامد م١ × م٢ = −١

$\frac{ص_1}{س_1} \times \frac{ص_2}{س_2} = -1$

أي س١ س٢ + ص١ ص٢ = ٠

مثال إذا كانت $\vec{أ}$ = (−٢، ٣)، $\vec{ب}$ = (−٤، م) احسب قيمة م التي تجعل ① $\vec{أ}$ // $\vec{ب}$ ② $\vec{أ}$ ⊥ $\vec{ب}$

الحل

① $\vec{أ}$ // $\vec{ب}$ ⟸ ميل الأول = $\frac{٣}{-٢}$

ميل الثاني = $\frac{م}{-٤}$

∴ $\frac{٣}{-٢} = \frac{م}{-٤}$ ⟸ م = $\frac{٣ \times -٤}{-٢}$

∴ م = ٦

② $\vec{أ}$ ⊥ $\vec{ب}$ ميل الأول × ميل الثاني = −١

∴ $\frac{٣}{-٢} \times \frac{م}{-٤} = -١$ ⟸ م = $\frac{-٨}{٣}$

⟸ إذا كانت $\vec{أ}$ = (٢، ٥)، ب = (ك، −٤) أوجد قيمة ك عند ① $\vec{أ}$ // $\vec{ب}$ ② $\vec{أ}$ ⊥ $\vec{ب}$

مثال إذا كان $\vec{ج}$ = ٣ $\vec{س}$ + ٤ $\vec{ص}$، $\vec{د}$ = −٦ $\vec{س}$ − ٨ $\vec{ص}$، $\vec{ل}$ = م $\vec{س}$ − ٨ $\vec{ص}$، $\vec{هـ}$ = ٤ $\vec{س}$ + ن $\vec{ص}$

① أثبت أن $\vec{ج}$ // $\vec{د}$ ② هل $\vec{هـ}$ ⊥ $\vec{ج}$

③ أوجد م إذا كان $\vec{ج}$ // $\vec{ل}$

④ أوجد ن إذا كان $\vec{هـ}$ ⊥ $\vec{ل}$

الحل

① ميل الأول = $\frac{٣}{٤}$ ⟵ (١)

ميل الثاني = $\frac{-٦}{-٨} = \frac{٣}{٤}$ ⟵ (٢)

من ① و ② يتضح أن $\vec{ج}$ // $\vec{د}$

حل بطريقة أخرى

② ٤ × ٣ + (−٣ × ٤) = صفر

∴ $\vec{هـ}$ ⊥ $\vec{ج}$

③ $\vec{ج}$ // $\vec{ل}$

٣ × −٨ − ٤ × م = ٠

−٢٤ − ٤م = ٠ ∴ **م = −٦**

④ $\vec{هـ}$ ⊥ $\vec{ل}$

∴ −٦ × ٤ + (−٨ × ن) = صفر

∴ −٢٤ − ٨ن = صفر

∴ −٢٤ − ٨ن = صفر ∴ ٨ن = −٢٤

∴ **ن = −٣**

خلي بالك $\vec{م} // ك \cdot \vec{م}$

معناها $\vec{أ} // ٣ \vec{أ}$

$\vec{أ} // -\frac{١}{٢} \vec{أ}$ ← عكس الإشارة

$\| ك \vec{م} \| = | ك | \cdot \| \vec{م} \|$

مثال إذا كان

$\| ٣ ك \vec{م} \| = \| -١٥ \vec{م} \|$

احسب قيم ك

$| ٣ ك | \cdot \| \vec{م} \| = | -١٥ | \cdot \| \vec{م} \|$

$\therefore | ٣ ك | = ١٥ \Leftarrow | ك | = ٥$

$\Leftarrow$ $ك = \pm ٥$

← إذا كان $\| ك (-٤ ، ٣) \| = ٥$ فإن ك = ...

← إذا كان $\| ٩ \vec{م} \| = ١٣ \| ك \vec{م} \|$ فإن ك = ...

الواجب

لا أكمل **مسائل امتحانات**

(أ) إذا كان $\vec{أ} = ٣ \vec{س} - ٢ \vec{ص}$ ، $\vec{ب} = ٤ \vec{س} + \vec{ص}$ فإن $\| \vec{أ} + \vec{ب} \|$ = ... (الجيزة 2017)

(ب) إذا كان $\vec{وم} = (٦ ، ١٥٠^\circ)$ متجه موضع للنقطة م فإن $\vec{وم}$ = ... (بدلالة متجهي الوحدة الأساسيان) [الجيزة 2017]

(جـ) إذا كان $\vec{أ} = (-٣ ، ٢)$ ، $\vec{ب} = (٢ ، ك)$ وكان $\vec{أ} \perp \vec{ب}$ فإن ك = ... [القاهرة 2017]

(د) الصورة القطبية لـ $\vec{أ} = ٤ \sqrt{٣} \vec{س} + ٤ \vec{ص}$ هي ———— . [القاهرة 2017]

(هـ) الصورة الإحداثية للمتجه $\vec{ب} = (١٠ ، \pi)$ هي ———— . [الجيزة 2016]

(و) إذا كان $\vec{ب} = (٣ ، ٥)$ ، $\vec{جـ} = (-١ ، ٥)$ فإن $\| \vec{جـ} - \vec{ب} \|$ = ------ [الإسكندرية 2017]

(ز) كل من المتجهات متجه وحدة عدا .... $(١ ، ٠)$ ، $(٠,٦ ، ٠,٨)$ ، $(٠ ، -١)$ ، $(١ ، ١)$ اختر [الإسكندرية 2017]

(ل) إذا كان $\| ٢ ك \vec{م} \| = \| -٨ \vec{م} \|$ فإن ك = ... [الشرقية 2017]

(ي) إذا كان $\vec{وم} = (١٢ ، ٦٠^\circ)$ هو متجه موضع النقطة م بالنسبة لنقطة الأصل فإن نقطة م = ... [الإسماعيلية 2017]

س٢ إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٢ ، -٦) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (-٢ ، ٥) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (-٦ ، ١٤)

عبر عن $\overrightarrow{\text{جـ}}$ بدلالة $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

[الغربية 2016]

س٣ إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٦ ، -٦√٣)

اكتب الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$

[الغربية 2016]

س٤ إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٢ ، -١) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٣ ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (ك ، ١٠)

وكان $\overrightarrow{\text{جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ - $\overrightarrow{\text{أ}}$ متوازيان

احسب ك. [الفيوم 2017]

س٥ إذا كانت $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، ٣√٣)

احسب الصورة القطبية لمتجه موضع أ بالنسبة لنقطة الأصل.

(أسيوط 2017)

س٦ إذا كان $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٢$\overrightarrow{\text{س}}$ + ٣$\overrightarrow{\text{ص}}$

وكان $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = ك $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٦ص متوازيان

احسب قيمة ك. [قنا 2017]

س٧ إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، ٥)

وكان $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (-١ ، م) ، $\|\overrightarrow{\text{أب}}\|$ = ٤ وحدة

احسب قيمة م. [مطروح 2017]

س٨ إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٢ ، -٦) ،

$\overrightarrow{\text{ب}}$ = (-٢ ، ٥) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (-٦ ، ١٤)

احسب $\|\overrightarrow{\text{أ}} + ٢\overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{جـ}}\|$

[جنوب سيناء 2017]

س٩ إذا كان ك $\|٤\overrightarrow{\text{أ}}\|$ = $\|-٣\overrightarrow{\text{أ}}\|$

احسب قيمة ك.

[نماذج الكتاب]

س١٠ ارسم $\overrightarrow{\text{م}}$ = (٢ ، $\frac{\pi}{٤}$) في مستوى إحداثي متعامد ثم مثل هندسياً كلاً من متجهات الموضع التالية بقطع مستقيمة موجهة في نفس المستوى:

$\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٣$\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = -$\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = -٢$\overrightarrow{\text{م}}$

تابع العمليات على المتجهات

شوية ملاحظات زي الفل

1) $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{أجـ}$

2) $\overrightarrow{س ص} + \overrightarrow{ص ع} = \overrightarrow{س ع}$

3) $\overrightarrow{أجـ} - \overrightarrow{دجـ} = \overrightarrow{أجـ} - (-\overrightarrow{جـ د}) = \overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{جـ د} = \overrightarrow{أد}$

4) $\overrightarrow{أب} = -\overrightarrow{بأ}$

5) إذا كان أ ب جـ مثلث فإن $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ} + \overrightarrow{جـ أ} = \vec{0}$

6) لإثبات أن الشكل شبه منحرف نثبت أن فيه ضلعان متوازيان وغير متساويان في الطول

متجه الأول = ثابت × المتجه الثاني

ملاحظات تانى

1) في △ أ ب جـ إذا كان أ د متوسط فإن $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أجـ} = 2\overrightarrow{أد}$

2) إذا كان د منتصف $\overline{بجـ}$ في △ أ ب جـ فإن $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أجـ} = 2\overrightarrow{أد}$

3) طرح متجهين $\overrightarrow{أب} - \overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{جـ ب}$

4) $\overrightarrow{ل م} = \vec{م} - \vec{ل}$

5) $\overrightarrow{س ص} = \vec{ص} - \vec{س}$

مثال ١ (الإسكندرية ٢٠١٧)

أ ب جـ د شبه منحرف فيه أ(-٢، -٣)، ب(٤، -١)، جـ(٢، ٥)، د(-١، ك) حيث $\overrightarrow{أب} \parallel \overrightarrow{دجـ}$ ① أوجد قيمة ك ② أثبت أن $\overrightarrow{بجـ} \perp \overrightarrow{أب}$

الحل

∵ $\overrightarrow{أب} = \vec{ب} - \vec{أ} = (٦، ٢)$

$\overrightarrow{دجـ} = \vec{جـ} - \vec{د} = (٣، ٥ - ك)$

∵ $\overrightarrow{أب} \parallel \overrightarrow{دجـ}$

∴ ٦(٥ - ك) - ٢ × ٣ = ٠

∴ ك = ٤

② ∵ $\overrightarrow{بجـ} = \vec{جـ} - \vec{ب} = (-٢، ٦)$

$\overrightarrow{أب} = (٦، ٢)$

∴ -٢ × ٦ + ٦ × ٢ = صفر

⟸ $\overrightarrow{بجـ} \perp \overrightarrow{أب}$

س: أ ب جـ د شبه منحرف رؤوسه هي أ(١٠، ١١)، ب(ك، ٨)، جـ(-٤، ٤)، د(-٢، ٣) أوجد قيمة ك [illegible]

مثال ١

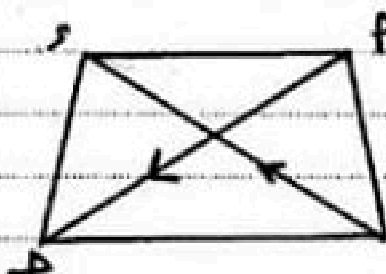
أ ب جـ د شكل رباعي فيه ، $\overrightarrow{بجـ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{أد}$

أثبت أن

١) أ ب جـ د شبه منحرف

٢) $\overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{بد} = \frac{5}{2}\overrightarrow{أد}$

الحل



∵ $\overrightarrow{بجـ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{أد}$

∴ $\overrightarrow{بجـ} \parallel \overrightarrow{أد}$

بجـ $= \frac{3}{2}$ أد

∴ بجـ $\neq$ أد

شكل رباعي به ضلعان متوازيان وغير متساويان

∴ الشكل أ ب جـ د شبه منحرف #

٢) $\overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{بد}$ (أمشي في جهة واحدة مع أجـ و ب د)

$\overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{أد} + \overrightarrow{دجـ}$ ← ① بالجمع

$\overrightarrow{بد} = \overrightarrow{بجـ} + \overrightarrow{جـد}$ ← ②

$\overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{بد} = \overrightarrow{أد} + \overrightarrow{دجـ} + \overrightarrow{بجـ} + \overrightarrow{جـد}$ (عكس بعض في الاتجاه)

∵ $\overrightarrow{دجـ} = -\overrightarrow{جـد}$

∵ $\overrightarrow{بجـ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{أد}$

∴ $\overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{بد} = \overrightarrow{أد} + \frac{3}{2}\overrightarrow{أد} = \frac{5}{2}\overrightarrow{أد}$ #

[اللهم لا سهل إلا ما جعلته سهلاً]

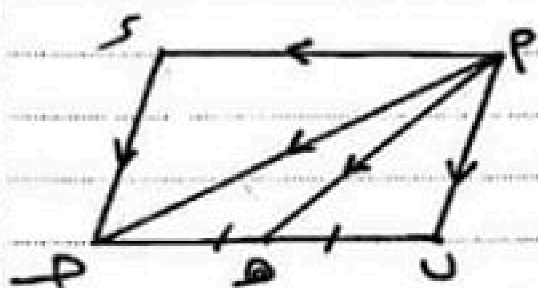
مثال ٢

أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه هـ منتصف $\overline{بجـ}$

أثبت أن

$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أد} + \overrightarrow{دجـ} = 2\overrightarrow{أهـ}$

الحل



∵ $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أد} + \overrightarrow{دجـ} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أجـ}$ ← ①

∵ هـ منتصف $\overline{بجـ}$

∴ في Δ أ ب جـ

$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أجـ} = 2\overrightarrow{أهـ}$ ← ②

بمقارنة ① و ② ينتج أن

$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أد} + \overrightarrow{دجـ} = 2\overrightarrow{أهـ}$

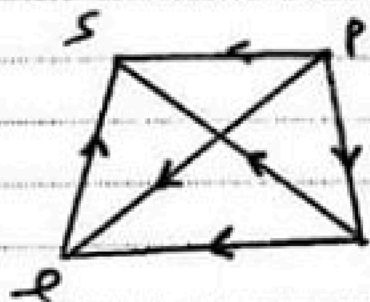
مثال ٣

في أي شكل رباعي أثبت أن

① $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ} + \overrightarrow{جـد} = \overrightarrow{أد}$

② $\overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{بد} = \overrightarrow{أد} + \overrightarrow{بجـ}$

الحل



$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ} + \overrightarrow{جـد}$

$= (\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ}) + \overrightarrow{جـد}$

$= \overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{جـد}$

$= \overrightarrow{أد}$

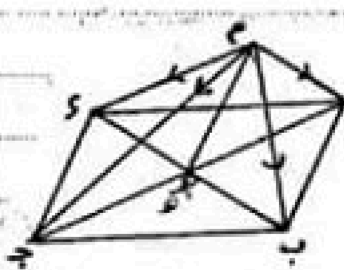
② حلها بنفسك #

مثال ٥

أ ب جـ د متوازي أضلاع، م نقطة ما في مستواه، هـ تقاطع قطريه أجـ ، ب د. أثبت أن

$\overrightarrow{\text{م أ}} + \overrightarrow{\text{م ب}} + \overrightarrow{\text{م جـ}} + \overrightarrow{\text{م د}} = ٤ \overrightarrow{\text{م هـ}}$

الحل



خد بالك عشان متمش هتشتغل على قاعدة المتوسط بس يا معلم

م هـ متوسط

في △ أ م جـ

∴ برضو م هـ متوسط في △ ب م د

∴ هـ منتصف أجـ وكذلك منتصف ب د

∴ $\overrightarrow{\text{م أ}} + \overrightarrow{\text{م جـ}} = ٢ \overrightarrow{\text{م هـ}}$ ← (١)

∴ $\overrightarrow{\text{م ب}} + \overrightarrow{\text{م د}} = ٢ \overrightarrow{\text{م هـ}}$ ← (٢)

بالجمع

$\overrightarrow{\text{م أ}} + \overrightarrow{\text{م ب}} + \overrightarrow{\text{م جـ}} + \overrightarrow{\text{م د}} = ٤ \overrightarrow{\text{م هـ}}$ ✲

إذا كانت $٢ \overrightarrow{\text{أجـ}} + ٣ \overrightarrow{\text{أب}} = ٢ \overrightarrow{\text{جـ ب}} - \overrightarrow{\text{ب أ}}$

فأثبت أن $\overrightarrow{\text{أجـ}} = \overrightarrow{\text{جـ أ}}$

الحل

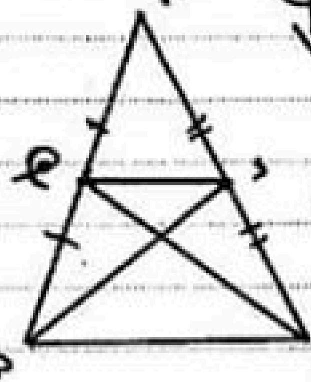
متروك لك صحح

مثال ٦

أ ب جـ △ فيه د منتصف أب ، هـ منتصف أجـ. أثبت أن

$\overrightarrow{\text{أهـ}} + \overrightarrow{\text{هـ د}} = \overrightarrow{\text{جـ ب}} + \overrightarrow{\text{د أ}}$

الحل



∵ $\overrightarrow{\text{أهـ}} + \overrightarrow{\text{هـ د}}$

$= \overrightarrow{\text{هـ أ}} + \overrightarrow{\text{أ د}}$

$= \overrightarrow{\text{هـ د}}$ ← (١)

∵ $\overrightarrow{\text{جـ ب}} + \overrightarrow{\text{د أ}} = \overrightarrow{\text{هـ ب}} + \overrightarrow{\text{ب د}} = \overrightarrow{\text{هـ د}}$ ← (٢)

من (١) ، (٢)

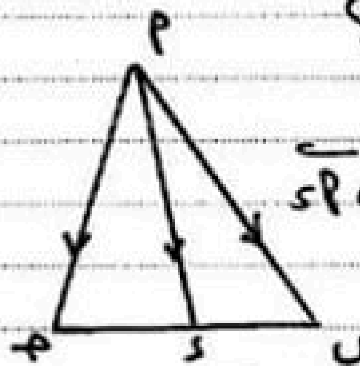
$\overrightarrow{\text{أهـ}} + \overrightarrow{\text{هـ د}} = \overrightarrow{\text{جـ ب}} + \overrightarrow{\text{د أ}}$ ✲

مثال ٧ الجيزة ٢٠١٧

أ ب جـ مثلث فيه د ∈ ب جـ حيث $٥ \overrightarrow{\text{ب د}} = ٤ \overrightarrow{\text{د جـ}}$. أثبت أن

$٥ \overrightarrow{\text{أب}} + ٤ \overrightarrow{\text{أجـ}} = ٩ \overrightarrow{\text{أد}}$

الحل



في △ أ ب د

∵ $٥ \overrightarrow{\text{أب}} + ٥ \overrightarrow{\text{ب د}} = ٥ \overrightarrow{\text{أد}}$ ← (١)

في △ أ د جـ

$٤ \overrightarrow{\text{أجـ}} + ٤ \overrightarrow{\text{جـ د}} = ٤ \overrightarrow{\text{أد}}$ ← (٢)

بجمع (١) ، (٢)

$٥ \overrightarrow{\text{ب د}} = -٤ \overrightarrow{\text{جـ د}}$ ∴ $٥ \overrightarrow{\text{أب}} + ٤ \overrightarrow{\text{أجـ}} = ٩ \overrightarrow{\text{أد}}$

اسكندرية ٢٠١٧ في △ أ ب جـ ، د ∈ ب جـ حيث ٢ ب د = ٣ د جـ

أثبت أن ٢ أ ب + ٣ أ جـ = ٥ أ د

مثال ٨ أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه أ = (٣ ، ٠) ، ب = (١ ، ٤) ، د = (−٢ ، −١) أوجد إحداثي جـ

الحل



∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع

∴ ب جـ = أ د

∴ جـ − ب = د − أ

∴ جـ = د − أ + ب

جـ = (−٢ ، −١) − (٣ ، ٠) + (١ ، ٤)

= (−٥ ، ٣)

مثال ٩ أ ب جـ د شبه منحرف فيه أ = (−٢ ، −٣) ، ب = (٤ ، −١)

جـ = (٢ ، ٥) ، د (−١ ، ك)

① أوجد قيمة ك

② أثبت أن جـ ب ⊥ أ ب

③ أوجد مساحة شبه المنحرف أ ب جـ د

مثال ١٠ إذا كان ٤ أ م − ٣ س ص = ٤ ع ص + ٧ ص س

فأثبت أن أ م = ع س

الحل

∵ ٤ أ م = ٤ ع ص + ٧ ص س + ٣ س ص

وبالمثل ٣ س ص = −٣ ص س

∴ ٤ أ م = ٤ ع ص + ٧ ص س − ٣ ص س

٤ أ م = ٤ ع ص + ٤ ص س

∴ أ م = ع ص + ص س

∴ أ م = ع س

الواجب

[١] $ABCD$ شبه منحرف فيه $A = (-2, -3)$ ، $B = (4, 2-1)$ ، $C = (2, 5)$ ، $D = (-1, 1-k)$ أوجد
① قيمة k التي تجعل $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$
② التي تجعل $\overline{AB} \perp \overline{AD}$
③ احسب مساحة $ABCD$

[٢] تمنا ٢٠١٧ إذا كان $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{BC}$ فأثبت أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$

[٣] في $\triangle ABC$ ، D ، E منتصفات الأضلاع $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ ، $\overline{CA}$ على الترتيب
أثبت أن $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DC}$

[٤] $ABCD$ متوازي أضلاع
أثبت أن
- $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$

[٥] في أي مثلث أثبت أن ($س$ ، $ص$ ، $ع$ ...)
$\overrightarrow{سص} + \overrightarrow{صع} + \overrightarrow{عس} = \vec{0}$

[٦] $ABCD$ شكل رباعي فيه $A(1, -2)$ ، $B(9, 2)$ ، $C(8, 4)$ ، $D(0, 2)$ أثبت أن
① $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ② $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

[٧] $ABCD$ شكل رباعي فيه $2\overrightarrow{BC} = 5\overrightarrow{AD}$
أثبت أن $2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{AD}$

[٨] $ABCD$ مستطيل فيه $A = (5, 1)$ ، $B = (2, -2)$
$C = (-3, 2 - k)$ ما وجد قيمة k
ثم أوجد احداثي النقطة D

[٩] إذا كانت M نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC ، O نقطة خارج المثلث
أثبت أن $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OM}$

شغل دماغك يا معلم

[١] $ABCD$ شكل رباعي
$س$ ، $ص$ ، $ع$ ، $ن$ منتصفات $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ ، $\overline{CD}$ ، $\overline{DA}$ على الترتيب
أثبت أن
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$
$= 2(\overrightarrow{عس} + \overrightarrow{نص})$

[٢] في مستوى احداثي متعامد $\overrightarrow{AB} = (-2, 3)$ ، $\overrightarrow{BC} = (-6, 2)$
$2\overrightarrow{B} + \overrightarrow{AC} = (6, 11)$ أوجد
① إحداثي كل من النقط A ، B ، C
② مساحة سطح المثلث ABC

أ/ مصطفى فواز سيد
01118275262

تطبيقات على المتجهات

مثال: باستخدام المتجهات أثبت أن النقط
أ(١،٤)، ب(-١،-٢)، جـ(٢،-٣)
هي رؤوس مثلث قائم الزاوية في ب

الحل

في △ أ ب جـ

أب = ب - أ = (-١،-٢) - (١،٤)
= (-٢،-٦)

جـب = ب - جـ = (-١،-٢) - (٢،-٣)
= (-٣،١)

∵ (-٢)×(-٣) + (-٦)×١ = صفر

∴ أب ⊥ جـب ∴ ق(∠ب) = ٩٠°

∴ △ أ ب جـ قائم الزاوية في ب

مثال: باستخدام المتجهات أثبت أن القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وطولها = ½ طوله

الحل

∵ د منتصف أب

∵ أد = ½ أب

∵ هـ منتصف أجـ

∴ أهـ = ½ أجـ

في △ أ ب جـ (الكبير) ∵ ب جـ = ب أ + أ جـ ①

في △ أ د هـ (الصغير) ∵ د هـ = د أ + أ هـ ②

د هـ = ½ ب أ + ½ أ جـ

= ½ (ب أ + أ جـ)

∴ د هـ = ½ ب جـ

∴ د هـ // ب جـ

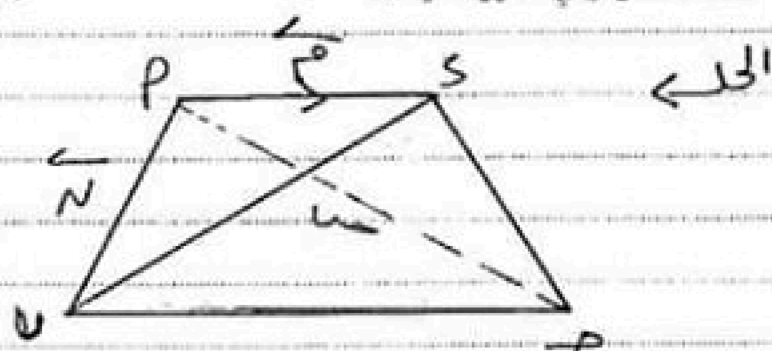
، د هـ = ½ ب جـ

مثال ٢: أ ب جـ د شبه منحرف
فيه أد // ب جـ ، ب جـ = ٣ أد
أد = م ، أب = ن

① عبر بدلالة م ، ن عن ب جـ
، أجـ ، ب د ، جـ د

② إذا كانت س ∈ د ب حيث
د س = ⅓ د ب فأثبت أن
أ ، س ، جـ على استقامة واحدة

الحل



① $\overrightarrow{بجـ} = ٣\,\overrightarrow{أد} = ٣\,\overrightarrow{م}$

② $\overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ}$

$= \overrightarrow{ن} + ٣\,\overrightarrow{م}$

③ $\overrightarrow{بد} = \overrightarrow{بأ} + \overrightarrow{أد} = -\overrightarrow{ن} + \overrightarrow{م}$

④ $\overrightarrow{دجـ} = \overrightarrow{دأ} + \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ}$

$= -\overrightarrow{م} + \overrightarrow{ن} + ٣\,\overrightarrow{م} = \overrightarrow{ن} + ٢\,\overrightarrow{م}$

⇐ المطلوب الثاني

∵ $دس = \frac{١}{٣}\,سب$

∴ $سب = ٣\,سد$

∵ $س \in \overline{بد}$ ∴ $\overrightarrow{سب} = ٣\,\overrightarrow{دس}$

في Δ ب جـ س

$\overrightarrow{سجـ} = \overrightarrow{سب} + \overrightarrow{بجـ}$

$= ٣\,\overrightarrow{دس} + ٣\,\overrightarrow{أد}$

$= ٣(\overrightarrow{دس} + \overrightarrow{أد}) = ٣(\overrightarrow{أد} + \overrightarrow{دس})$

$= ٣\,\overrightarrow{أس}$

∴ $\overrightarrow{سجـ}$ ، $\overrightarrow{أس}$ لهما نفس الاتجاه ومشتركتان في النقطة س

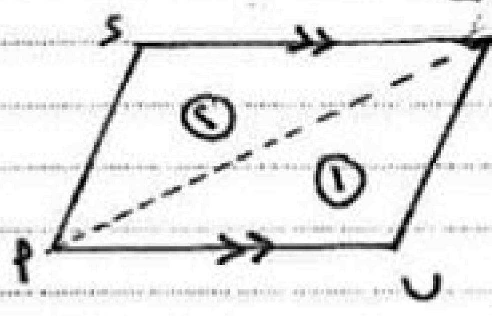
∴ أ ، س ، جـ تقع على استقامة واحدة

مثال ٤ باستخدام المتجهات

أثبت أنه إذا تساوى وتوازى ضلعان متقابلان في أي شكل رباعي فإن الضلعان الآخران يكونان متساويان ومتوازيان ويكون الشكل متوازي أضلاع

الحل

المعطى $\overline{أب} \parallel \overline{دجـ}$ ، $أب = دجـ$



المطلوب $\overline{بجـ} \parallel \overline{أد}$ ، $بجـ = أد$

العمل: نرسم $\overline{أجـ}$

البرهان

∵ $أب = دجـ$ ، $\overline{أب} \parallel \overline{دجـ}$ ∴ $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{دجـ}$

في Δ أبجـ: $\overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ}$ ← ①

في Δ أدجـ: $\overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{أد} + \overrightarrow{دجـ}$ ← ②

من ① و ②

∴ $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{أد} + \overrightarrow{دجـ}$

∵ $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{دجـ}$ ، ∴ $\overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{أد}$

∴ $\overline{بجـ} \parallel \overline{أد}$ ، $بجـ = أد$

∴ الشكل أبجـد متوازي أضلاع

ملحوظة هامة

نقطة تلاقي متوسطات المثلث

أ ب جـ   أ (س١ ، ص١)

ب (س٢ ، ص٢)

= ((س١ + س٢ + س٣) / ٣ ، (ص١ + ص٢ + ص٣) / ٣)

مثال

المثلث أ ب جـ رؤوسه

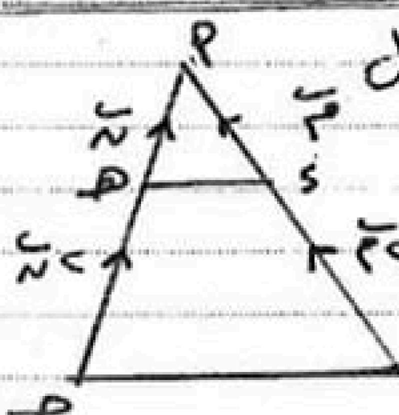
أ (٢ ، ١) ، ب (١ ، ٥)

جـ (٦ ، -٣) فأوجد نقطة

تلاقي متوسطاته

= ((٢ + ١ + ٦) / ٣ ، (١ + ٥ - ٣) / ٣)

= (٩/٣ ، ٣/٣) = (٣ ، ١)



← في الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث فيه

د ∈ أ ب

هـ ∈ أ جـ

د م = م

هـ أ = ن ، ب د = م ، جـ هـ = ن

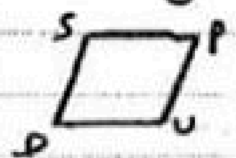
أوجد ب جـ بدلالة م ، ن

ثم برهن أن ب جـ // د هـ

ملاحظات لحل مسائل الاشكال الرباعية

أ ب جـ د شكل رباعي

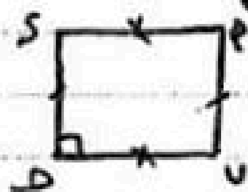
① أولاً متوازي الاضلاع



أ ب = د جـ

أو أ د = ب جـ

② ثانياً المستطيل



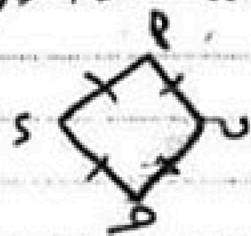
نثبت أنه متوازي

ثم ① أ ب ⊥ ب جـ

أو

② || أ جـ || = || ب د || القطران متساويان

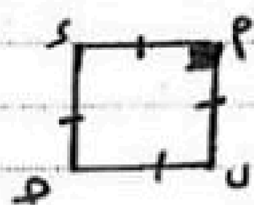
③ المعين



① أ ب = ب جـ

② أو أ جـ ⊥ ب د القطران متعامدان

④ المربع



نثبت أنه متوازي

ثم

|| أ ب || = || ب جـ ||

أ ب ⊥ ب جـ

أ/ مصطفى فوزي سيد
01118275262

مثال ٦ أ ب جـ د شكل رباعي فيه أ(٠، ١)، ب(٤، ٥)، جـ(١، ٨)، د(-٣، ٤) أثبت أن أ ب جـ د مستطيل باستخدام المتجهات ثم احسب محيطه ومساحته

الحل

∵ أب = ب - أ

= (٤، ٥) - (٠، ١) = (٤، ٤)

د جـ = جـ - د = (١، ٨) - (-٣، ٤)

= (٤، ٤)

د جـ = (٤، ٤)

∴ أب = د جـ

∴ الشكل متوازي أضلاع

∵ ب جـ = جـ - ب = (-٣، ٣)

ميل أب = $\frac{٤}{٤}$ = ١ ، ميل ب جـ = $\frac{٣}{-٣}$ = -١

∴ ميل أب × ميل ب جـ = ١ × -١ = -١

∴ أب ⊥ ب جـ

∴ الشكل أ ب جـ د مستطيل

||أب|| = $\sqrt{٤^٢ + ٤^٢}$ = $\sqrt{٣٢}$ = ٤$\sqrt{٢}$ وحدة طول

||ب جـ|| = $\sqrt{(-٣)^٢ + ٣^٢}$ = ٣$\sqrt{٢}$ وحدة طول

∴ محيط المستطيل =

مساحة المستطيل =

← باستخدام المتجهات أثبت أن النقط أ(٣، ٤)، ب(١، -١)، جـ(-٤، -٣)، د(-٢، ٢) هي رؤوس معين

مثال ٧ إذا كانت أ(٥، ١)، ب(٢، ٣)، جـ(٢، ٥)، د(٥، ٤) فأثبت باستخدام المتجهات أن الشكل أ ب جـ د شبه منحرف

الحل

∵ أد = د - أ

= (٥، ٤) - (٥، ١) = (٠، ٣)

ب جـ = جـ - ب

= (٢، ٥) - (٢، ٣) = (٠، ٢)

∵ ٣ × ٠ - ٠ × ٢ = ٠ = صفر

∴ أد // ب جـ ← ①

||أد|| = $\sqrt{(٠)^٢ + (٣)^٢}$ = ٣ وحدة طول

||ب جـ|| = $\sqrt{(٠)^٢ + (٢)^٢}$ = ٢ وحدة طول

∴ ||أد|| ≠ ||ب جـ|| ← ②

من ① و ②

الشكل أ ب جـ د شبه منحرف

مثال ٨ إذا كانت القوى (بالنيوتن)

ق١ = ٥ س + ٢ ص

ق٢ = -٢ س + ٧ ص

ق٣ = ٣ س - ص

أوجد مقدار واتجاه المحصلة

الحل

ح = ق١ + ق٢ + ق٣

ح = (٥ - ٢ + ٣) س + (٢ + ٧ - ١) ص

= ٦ س + ٨ ص

المقدار = || ح || = √(٦² + ٨²)

= ١٠ نيوتن

الاتجاه هـ

ظا هـ = ٨/٦ ∴ هـ = ظا⁻¹(٤/٣) ≃ ٥٣°

مثال ٩ إذا كانت ق١ = (٥ ، -٣)

ق٢ = أ س - ٢ ص

ق٣ = (-٧ ، ب) أوجد قيمتي

أ ، ب إذا كانت القوى متزنة

الحل

ح = ق١ + ق٢ + ق٣

ح = (٥ + أ - ٧) س + (-٣ - ٢ + ب) ص

∵ المجموعة متزنة

∴ المحصلة = صفر

(-٢ + أ) س + (-٥ + ب) ص = صفر

-٢ + أ = ٠ ⟸ أ = ٢

-٥ + ب = ٠ ⟸ ب = ٥

⟸ إذا كانت القوى الآتية تؤثر

ق١ = ٥ س + ١٩ ص

ق٢ = ٦ س - ٣ ص

ق٣ = -٤ س + ٨ ص

في نقطة مادية احسب مقدار واتجاه المحصلة هذه القوى

⟸ إذا كانت القوى

ق١ = ٢ س + ٣ ص

ق٢ = أ س + ص

ق٣ = ٥ س + ب ص

فأوجد قيمتي أ ، ب إذا كانت

① المجموعة متزنة

② المحصلة = ٥ س - ٢ ص

③ المحصلة = ٣ ص

مثال٢ تتحرك سيارة م على طريق مستقيم بسرعة ٨٠ كم/س

وتتحرك سيارة ب على نفس الطريق بسرعة ٦٠ كم/س أوجد سرعة م بالنسبة لـ ب إذا كانت

① السيارتان في اتجاه واحد

② السيارتان في اتجاهين متضادين

الحل

① نفس الاتجاه

$\overline{ع}_{مب} = \overline{ع}_م - \overline{ع}_ب$

$= ٨٠ \overline{ى} - ٦٠ \overline{ى} = ٢٠ \overline{ى} = ٢٠$ كم/س

② في اتجاهين متضادين

$\overline{ع}_م = ٨٠ \overline{ى}$ $\overline{ع}_ب = -٦٠ \overline{ى}$

$\overline{ع}_{مب} = \overline{ع}_م - \overline{ع}_ب$

$= ٨٠ - (-٦٠) = ١٤٠ \overline{ى}$

$= ١٤٠$ كم/س

خلي بالك من السرعة النسبية

✍ تذكر دستورك من الصف الثالث الإعدادي

$\overline{ع}_{مب} = \overline{ع}_م - \overline{ع}_ب$ ⟵ نفس الاتجاه

$\overline{ع}_{بم} = \overline{ع}_ب - \overline{ع}_م$

$\overline{ع}_{مب} = \overline{ع}_م + \overline{ع}_ب$ ⟸ اتجاه مضاد

مثال٣ تتحرك سيارة م على طريق مستقيم بسرعة ٩٠ كم/س إذا تحركت دراجة بخارية بسرعة ٤٠ كم/س على نفس الطريق

خليها عليك المرة دي وحل أنت

حليت طلع معاك الناتج ١٥٠ كم/س

ولالا راجع حلك يا معلم

أ/ مصطفى فواز سيد
01118275262

الواجب

① إذا كان ا ب ح ء شكل رباعي فيه ا = (١، -٢) ، ب = (٩، ٠) ، ح = (٨، ٤) ، ء = (٠، ٢) أثبت باستخدام المتجهات أن الشكل ا ب ح ء مستطيل ثم أوجد محيطه ومساحته

② ا ب ح ء شكل رباعي فيه ا(٣، ٢) ، ب = (٤٢، -٣) ، ح = (-٨، -٢) ء = (-٢، ٣) أثبت باستخدام المتجهات أن الشكل ا ب ح ء معين ثم أوجد محيطه ومساحته

③ في الشكل المقابل ا ب ح ء شبه منحرف فيه اء // ب ح

ب ح = ٣ اء ، اء = م ، ا ب = ن ، اح = م

أولاً عبر بدلالة م ، ن عن كلاً من ب ح ، اح ، ب ء ، ء ح

حل بقا (١٠، ٢٠، ١٢٠)

④ إذا كانت القوى ق١ = (٨، -٢) ق٢ = ا س + ٣ ص ، ق٣ = (-٤، ب) أوجد قيمتي ا ، ب إذا كانت

① مجموعة القوى متزنة

② محصلة القوى = -٥ ص

⑤ يتحرك راكب دراجة ا على طريق مستقيم أفقي بسرعة ٢٤ كم/س فإذا قابل راكب آخر ب يتحرك بسرعة ٣٠ كم/س في الاتجاه المضاد أوجد سرعة ب بالنسبة لـ ا

⑥ تتحرك سيارة ا على طريق مستقيم بسرعة ١٤٠ كم/س وتتحرك السيارة ب على نفس الطريق بسرعة ١١٠ كم/س أوجد سرعة السيارة ا بالنسبة لسيارة ب عندما

① تتحرك السيارتان في نفس الاتجاه

② في الاتجاه المضاد

⑦ إذا كانت ق١ = ٥ س + ٣ ص ، ق٢ = (ا+٧) س + ٦ ص ، ق٣ = -١٤ س + (٢ - ب) ص ثلاث قوى مستوية متلاقية في نقطة وكانت القوة المحصلة بصورة العظمى (١٠، ٢٠، ١٢٠)

01118275262

مصطفى عواز سيد

ثانيا الأسئلة المقالية

١ في نظام إحداثي متعامد نقطة الأصل فيه : و (٠ ، ٠) عين النقط : أ(-٤ ، ٠) ، ب(٠ ، -٣) ، حـ(٣ ، ١) ، ء(٢ ، ٨) ثم أوجد :

① متجه الموضع بالنسبة لنقطة الأصل (و) لكل من النقط أ ، ب ، حـ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين.

② متجه الموضع للنقطة ء بالنسبة لنقطة الأصل (و) بالصورة القطبية.

③ معيار القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{أب}$

④ قيمة ك التي تجعل $\overrightarrow{أء}$ = ك $\overrightarrow{بحـ}$

٢ في مستوى إحداثي متعامد ، نقطة الأصل و (٠ ، ٠) ، إذا كانت أ(١ ، -٤) ، ب(٤ ، ٠) ، حـ(-٢ ، ١) ، ء(١ ، ٥)

① أوجد : ‖$\overrightarrow{أب}$‖ ، ‖$\overrightarrow{حـء}$‖ ② أثبت أن : $\overrightarrow{أب}$ تكافئ $\overrightarrow{حـء}$

③ إذا كانت : $\overrightarrow{بحـ}$ تكافئ $\overrightarrow{هـء}$ أوجد إحداثيي : هـ

٣ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٤ ، ١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (-١ ، ٦) ، $\overrightarrow{حـ}$ = (١ ، ١٢)

① أوجد بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين كلًا من : $\overrightarrow{ب}$ - $\overrightarrow{حـ}$ ، $\frac{1}{2}$($\overrightarrow{ب}$ + $\overrightarrow{حـ}$)

② عبر عن : $\overrightarrow{حـ}$ بدلالة $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

٤ أوجد بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين المتجه الذي يعبر عن :

① قوة مقدارها ٢٠ نيوتن تؤثر على جسم ، وتعمل في اتجاه الشمال.

② إزاحة جسم مسافة ٥٠ سم في اتجاه ٣٠° شمال الغرب.

③ السرعة المنتظمة لسيارة تقطع مسافة ٧٠ كم/س في اتجاه الغرب.

٥ إذا كان : $\overrightarrow{م}$ = $\overrightarrow{س}$ + ٢ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ن}$ = -٥ $\overrightarrow{س}$ - ١٠ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ل}$ = أ $\overrightarrow{س}$ + ١٠ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ب $\overrightarrow{ص}$

① أثبت أن : $\overrightarrow{م}$ // $\overrightarrow{ن}$ ② أوجد : أ ∈ ع إذا كان $\overrightarrow{م}$ // $\overrightarrow{ل}$

③ أوجد : ب ∈ ع إذا كان $\overrightarrow{ق}$ ⊥ $\overrightarrow{ن}$ ④ هل : $\overrightarrow{ق}$ ⊥ $\overrightarrow{م}$ ؟ فسر إجابتك.

٦ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٤ ، -٦) ، $\overrightarrow{ب}$ = (-٦ ، ٩) ، $\overrightarrow{حـ}$ = (-٣ ، -٢)

① أثبت أن : $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ⊥ $\overrightarrow{حـ}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ ⊥ $\overrightarrow{أ}$

② أوجد : ٢ $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{ب}$ - ٢ $\overrightarrow{حـ}$ ، $\frac{1}{2}$ $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ - ٣ $\overrightarrow{حـ}$

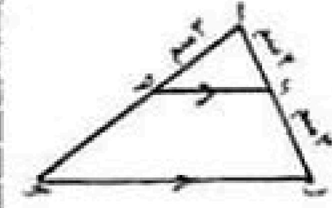
٧ إذا كان $\overrightarrow{أب}$ = (١ ، -٤) ، أ(٢ ، ٣) ، حـ(-١ ، ١٥)

أوجد قيمتي ل ، م إذا كان : ل $\overrightarrow{أ}$ - م $\overrightarrow{ب}$ = $\overrightarrow{حـ}$

٨ إذا كان أ ب حـ ء متوازي أضلاع حيث أ (٢ ، -٢) ، ب(٤ ، -٢) ، حـ(٢ ، ٣)

أوجد إحداثيي نقطة ء

٩ في الشكل المقابل :



$\overline{ءهـ}$ // $\overline{بحـ}$ أوجد قيم ك ، ل ، م ، ن العددية إذا كان :

① $\overrightarrow{بء}$ = ك $\overrightarrow{ءأ}$ ② $\overrightarrow{حـهـ}$ = ل $\overrightarrow{حـأ}$

③ $\overrightarrow{بحـ}$ = م $\overrightarrow{هـء}$ ④ $\overrightarrow{أء}$ + $\overrightarrow{ءهـ}$ = ن $\overrightarrow{أحـ}$

١٠ باستخدام المتجهات أثبت أن : قطرى متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر.

١١ أ ب حـ ء مستطيل حيث : أ(-١ ، -٢) ، ب(٥ ، ١) ، حـ(٢ ، ك)

أوجد :

① قيمة ك ② إحداثيي نقطة ء

١٢ في مستوى إحداثي متعامد ، $\overrightarrow{أب}$ = (-٢ ، ٣) ، $\overrightarrow{حـب}$ = (-٦ ، -٤) ، ٢ $\overrightarrow{ب}$ + $\overrightarrow{أحـ}$ = (٦ ، ١١)

أوجد :

① إحداثيي كل من النقط : أ ، ب ، حـ

② مساحة سطح المثلث أ ب حـ (باستخدام المتجهات).

الوحدة الثانية: تقسيم القطعة المستقيمة

ملاحظات جامده جدا

١) إذا كان التقسيم من الداخل نترك النسبة موجبة

وإذا كانت التقسيم من الخارج فان النسبة سالبه (نغير أى نسبه والافضل يعنى الاصغر بالسالب)

٢) لا تبديل ل (تحليط $\frac{ل_٢}{ل_١}$)

٣) اذا كان حـ ∈ $\overline{اب}$ من الداخل ، حـ ∈ $\overleftrightarrow{اب}$ من الخارج

٤) القانون $\vec{ر} = \frac{ل_١ \vec{ر}_٢ + ل_٢ \vec{ر}_١}{ل_١ + ل_٢}$ ← (الصورة المتجهة)

٥) الصورة الاحداثية (س ، ص) = $\left(\frac{ل_١ س_٢ + ل_٢ س_١}{ل_١ + ل_٢} ، \frac{ل_١ ص_٢ + ل_٢ ص_١}{ل_١ + ل_٢}\right)$

٦) احداث منتصف قطعه مستقيمة

$\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$

٧) احداث متوسط المثلث

$\left(\frac{س_١ + س_٢ + س_٣}{٣} ، \frac{ص_١ + ص_٢ + ص_٣}{٣}\right)$

٨) ثلاث اجزاء متساويه يبقى النسبة ١ : ٢

٩) إذا كان حـ ∈ $\overline{اب}$ وتقع فى ربع المسافة يبقى ١ : ٣

١٠) فى فرق بين $\overrightarrow{اب}$ ، $\overrightarrow{با}$ الطرف الاول هو (س١ ، ص١) والثانى (س٢ ، ص٢)

مثال٢ إذا كانت ؟ = (٢، ٦) هي منتصف $\overline{أب}$ حيث أ = (-٣، ٧) فأوجد النقطة ب = (---، ---)

الحل

مثال٣ إذا كانت أ = (٣، ٦)، ب = (-٧، ٤) فأوجد منتصف $\overline{أب}$ = (---، ---)

الحل

المنتصف = $\left(\frac{س_1+س_2}{2}, \frac{ص_1+ص_2}{2}\right)$

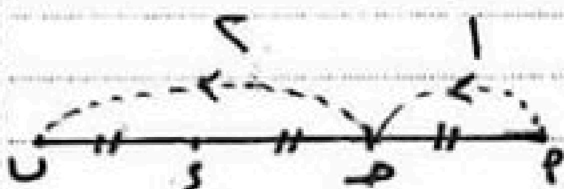
= $\left(\frac{3-7}{2}, \frac{6+4}{2}\right)$ = (-٢، ٥)

⇐ إذا كانت: ج = (٢، ٤) منتصف $\overline{أب}$ حيث أ = (س، ٤)، ب = (١، ص)

أوجد كلاً من: س، ص

مثال٤ إذا كانت: أ = (-١، ٤)، ب = (٥، -٢) فأوجد إحداثيات النقطتين ج، د اللتين تقسمان $\overline{أب}$ إلى ثلاثة أجزاء متساوية الطول

الحل



∵ ج تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة $\frac{م_1}{م_2} = \frac{1}{2}$

∴ ج = $\left(\frac{-2+5}{3}, \frac{8-2}{3}\right)$ = (١، ٢)

∴ ج = (١، ٢)

∵ د منتصف $\overline{جب}$

∴ د = $\frac{ج+ب}{2}$ = $\left(\frac{1+5}{2}, \frac{2-2}{2}\right)$

= (٣، ٠)

∴ د = (٣، ٠)

لإثبات أن النقط أ، ب، ج تقع على استقامة واحدة

← أب = لـ أج (باستخدام المتجهات)

← ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{أج}$ (باستخدام الميل)

← أب = ب ج + أ ج (البعد بين نقطتين) حيث أب الأكبر

Mr/ Mostafa Fawaz 01118275262

مثال ٦ أثبت أن النقط

أ = (١ ، -٣) ، ب = (-٢ ، -٩)

جـ = (٥ ، ٥) تقع على استقامة واحدة

الحل

باستخدام المتجهات

∵ $\overrightarrow{أب}$ = ب − أ = (-٢ ، -٩) − (١ ، -٣)

= (-٣ ، -٦) = -٣ (١ ، ٢)

$\overrightarrow{أجـ}$ = جـ − أ = (٥ ، ٥) − (١ ، -٣)

= (٤ ، ٨) = ٤ (١ ، ٢)

∴ $\overrightarrow{أجـ}$ = $\frac{٤}{-٣}$ $\overrightarrow{أب}$

∴ أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة ، ب ، جـ في جهتين مختلفتين

، $\frac{\|\overrightarrow{أجـ}\|}{\|\overrightarrow{أب}\|}$ = $\frac{٤}{٣}$ و ينتج أن

(١) جـ تقسم $\overline{أب}$ بنسبة ٤ : ٧ من الخارج

(٢) أ تقسم $\overline{بجـ}$ بنسبة ٣ : ٤ من الداخل

حل نفس المثال السابق بطريقتين مختلفتين (الميل - البعد)

مثال ٧ إذا كانت أ = (٢ ، ١) ، ب = (١ ، ٥) ، جـ = (٦ ، -٣) رؤوس مثلث فأوجد احداثي نقطة تلاقي متوسطاته

الحل

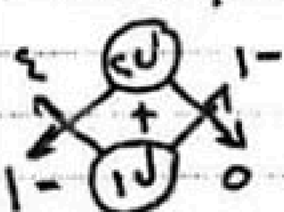
نفرض أن نقطة تلاقي متوسطاته هي م

∴ م = $\left(\frac{٢+١+٦}{٣} ، \frac{١+٥-٣}{٣}\right)$

= (٣ ، ١)

مثال ٨ إذا كانت أ = (-١ ، ٤) ، ب = (٥ ، -١) أوجد النسبة التي تقسم بها $\overline{أب}$ محور السينات. واحداثي نقطة التقسيم

الحل



∵ $\frac{-ل_٢ + ٤ ل_١}{ل_٢ + ل_١}$ = ٠

∴ $-ل_٢ + ٤ ل_١ = ٠$ ⟸ $٤ ل_١ = ل_٢$

∴ $\frac{ل_٢}{ل_١} = \frac{٤}{١}$

∴ محور السينات يقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ٤ : ١

س = $\frac{٤ \times ٥ + ١ \times -١}{٤ + ١} = \frac{١٩}{٥}$

∴ جـ = $\left(\frac{١٩}{٥} ، ٠\right)$ #

Fawaz